第 1 章
意料之外的绞刑

“最近出现了一个立意新颖而且理直气壮的悖论.”这是英国哲学杂志《心灵》①1951 年 7 月份上史克利文先生②那篇令人大伤脑筋的大作的第一句.史克利文的头衔是印第安纳大学的‘科学逻辑’教授,他在这一方面的意见一向受人敬重.在学术期刊上已刊登了 20 余篇有关这一悖论的文章，这充分证实了这个悖论是强有力的.这些专文的作者们几乎全是有名望的哲学家.他们各持己见,以不同的论点辩论这个问题,希望得到共识.但是因为一直找不到大家都能接受的解释，所以这个悖论也一直流行着.

这个悖论最早由何人提出已无法考据.哈佛大学的逻辑学家蒯因先生③曾在 1962 年 4 月份的《科学美国人》月刊④讨论这个悖

① *Mind*.
② Michael Scriven.
③ W. V. Quine.
④ *Scientific American*

论.他说早在 1940 年左右，这个悖论一直是靠口传而流行于世的.
[11]】最常用的故事就是讲一个罪犯服绞刑前所经历的波折.

这个罪犯是在礼拜六被判绞刑的“绞刑将在下周七天中的某一天中午十二时正举行,”法官对罪犯说“但是只有在执刑当天的早上通知你之后，你才会知道是在哪一天.”这位法官以言出必行而声名卓著.说完以上的话之后，罪犯便在律师的陪同之下回到牢房一到只有他们两人在一起的时候，律师马上面露笑容，说道：“你看出来没有？法官是无法执行绞刑的.”

“我没有看出来,”囚犯说.

“让我解释给你听.第一,下个星期六,也就是下周七天之中的最后一天，他们不能吊死你，因为，星期五的下午你仍然没有服刑，故而可以预期刑期将在星期六举行，也就是说还没有到星期六的早上，你已经预先知道了刑期.这和法官的判决不符.”

“对,”罪犯说.

“所以星期六这一天要被划掉,”律师继续说“因此,星期五变成可以执刑的最后一天.但是他们也不可以在星期五吊死你.因为到星期四时，离执刑的日子只剩下两天，即星期五和星期六.既然星期六已经被划掉，成为不能执刑的日子，所以执刑非在星[12]】期五不可.如此，你又事先知道了执刑的日子，这又和法官的判决不符.所以星期五也要被划掉.那么星期四就变成非执刑不可的最后一天.但是你既然星期三下午还活着，这使得星期四执刑也不符合法官的判决.因为你又事先知道执刑将在星期四这最后的一天.”

“好我看穿了,”囚犯说,精神也大为振奋“依此类推,甚至星期三、星期二和星期一都要一一被划掉.这就只剩下明天.但是我现在就知道是明天，所以明天也不可以执刑了.”

简单地来说，法官的判词似乎是自相驳斥.这判词的两部分在逻辑上来说确实不相矛盾，可是却无法付诸实行.奥康诺先生是

爱克斯特大学①的哲学家，他就是从这个角度来看这个悖论的，他也是第一位用文字讨论这个问题的学者（见 1948 年 7 月份的《心灵》）.他的文章是用军队司令官发号施令的形式来讨论这个悖论的.这位司令官说下星期的某一天将举行一次甲级夜行军.所谓甲级,就是说只有在夜行军执行当晚的六点钟，参与的人才会知道夜行军即将举行.

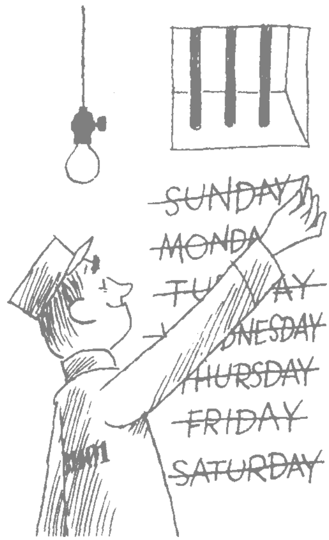


图 1 囚犯将可能执刑的日子一一划掉

“显而易见,”奥康诺写道,“根据如此宣布的规定来看，这次夜行军是无法执行的.”这就是说,执行是可以，但是会违背司令官所宣布的所谓“甲级”的规定.另外有两篇文章的作者也发表同样的看法.甚至鼎鼎大名的伽莫夫博士,在他与史登先生合写的《谜题数学》②一书中也将这个悖论包括在内（故事的形式也是被判绞刑的罪犯的执刑经历）.

这个悖论如果只是到此为止，则正如奥康诺先生所说的“微不足道”了.但是史克利文先生早就提到这并不是一个微不足道的悖论.只不过前三位作者都忽视了问题的关键所在.为了剖析这一点，让我们再来谈谈回到牢房里去的罪犯.他认为律师所讲的逻辑听上去无懈可击，故而他是一定不会被执行绞刑的.因为如果执刑，执刑官会违背判决词中的规定.但是没有想到，星期四

① Donald John O’Connor of University of Exeter.

② *Puzzle Math* by George Gamow and Marvin Stern.

的早晨，刽子手来到他的面前！这当然是在他的意料之外，让他大为吃惊.更令他不敢置信的是，这一切运作全部符合判决词中【13】的一字一眼."我认为这个悖论之所以引起众人的兴趣，正是由合情合理的逻辑却受到驳斥而起,'史克利文写道"逻辑学家们按部就班地循理而辩，以往也是一向如此.但是现实却像一头猛兽，不顾一切地勇往直前推翻常规."

为了让我们能更清楚地把握实际形势，也为了消除任何言语上的暧昧，我们将这个悖论再以两种不同的方式重新表述.这样做也是为了消除一些会混淆视听的题外枝节.例如法官临时变主意，甚至于囚犯在没有被执刑之前便因病身亡等等.

第一个表述方法采自史克利文的专文,也可以称之为'意料之外的鸡蛋'悖论.

请假想你面前有十个空盒子.每一个都标明了由 1 到 10 之间的一个不同的号码.当你转过身去时,你的朋友放了一个鸡蛋在某一个盒子里.当你转过身来时"你可以将盒子一个个打开,'你的朋友说"你可以依照号码顺次打开.这些盒子中，你会意料之外地发现一个鸡蛋.'所谓'意料之外",就是说在你没有打开盒子看之前，你是无法推测到鸡蛋是在这个你正要打开的盒子里.

假定你的朋友是言而有信的人，那么他的预测是否可以照章【14】实现呢？显然是不可能的.他当然不会把蛋放在第十个盒子里.因为在你一连打开了九个空盒子之后，你就可以预测到这个蛋会在那个还没有打开的盒子里.这就违反了'意料之外'的规定.所以，第十个盒子里是不可能有蛋的.假如他愚蠢到竟然将蛋放在第九个盒子里的话，会有什么后果呢？你又一连发现了八个空盒子，只有第九个盒子和第十个盒子还没有打开.既然鸡蛋不会在第十个盒子里，所以一定是在第九个盒子里.打开一看,果然在内.这就是意料之内被找到的蛋.所以你朋友的话再度失真.因此第九个盒子里不能有蛋.从此你开始陷入了不可自拔的非现实的推理过程之

中.因为用同样的推理步骤,第八、第七、第六、第五、第四、第三、第二、第一,每个盒子都不能放蛋.当你全心全意以为每个盒子都是空盒子而一个个地打开时，第五个盒子里是什么？竟然是一个“意料之外”的鸡蛋！你朋友的预测居然实现了.你的推理过程错在什么地方？

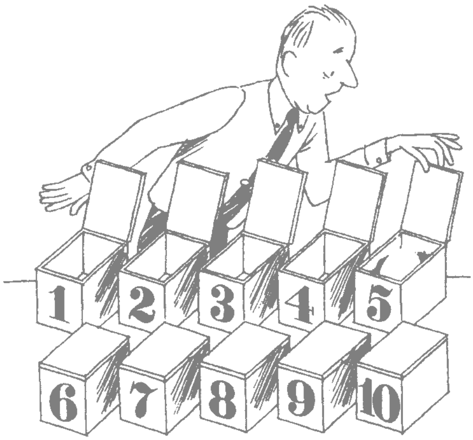


图 2 意料之外的鸡蛋悖论

让我们用第二种表述方式来讨论这个悖论以显示其尖锐的矛盾性.这种表述方式我们姑且称之为“意料之外的黑桃”.你同你的朋友一同坐在玩牌的牌桌前，他把手中拿住的十三张黑桃先给你看看.洗一遍之后打开成扇形，不过牌面朝他自己.然后他将其中一张牌牌面朝下发到桌上，同时让你慢慢地依序从 A 开始到 K 叫出十三张牌的点数.如果你叫的点数和他发下来的牌的点数不同，他就说‘不对”如果叫对了,他就说‘对了”.

“我跟你赌一千块钱,”他说“在我还没有说‘对了’之前,你是无法推测到这张牌的点数的.”

你的朋友当然会尽其可能地不要输给你.他会不会把 K 放到桌上呢？似乎不可能.因为在你叫过其他的十二个点数之后，

就只剩下一个 K，故而这时你可以极有信心地推测这张牌就是 K. 会不会是 Q 呢？不会. 因为在你叫过 J 之后就只剩下 K 和 Q 两张. 既然刚刚说过 K 不可能,所以一定是 Q. 你的正确推测会给你赢来一千块钱. 这样的推理可以重复使用在其他的牌上. 因此，不论是什么牌，你都可以成功地预测出它的点数. 这一套逻辑是无懈可击的. 可是同样明显的是，你眼睁睁地看着牌的背面，但是一点都没有猜到其点数的头绪.

【15】

这个悖论即使先加以简化,例如将七天改为两天,或者将十个盒子减少为两个盒子,十三张牌减少到两张,仍然会有相当难以捉摸的情况存在. 假定你的朋友手中只有黑桃 A 和黑桃 2 两张牌. 如果他发下的是黑桃 2 的话,你确实能够赢得赌注. 因为当你说出黑桃 A 并被其否定之后,你便可以说"依我的推测，这张牌肯定是黑桃 2."这个推测所根据的是"我面前的这张牌要么是黑桃 A，要么是黑桃 2"这一陈述的正确性.(前面以三种不同表述方式出现的同一悖论中,大家都有一个假定:那就是这罪犯一定会被处绞刑,某一个盒子里一定有一个蛋,或者你朋友手上的牌正是他所说的那些牌.)因此，你根据这些信息而作的推测是一定不会出错的,而你赢得一千元的机会也是一定的.

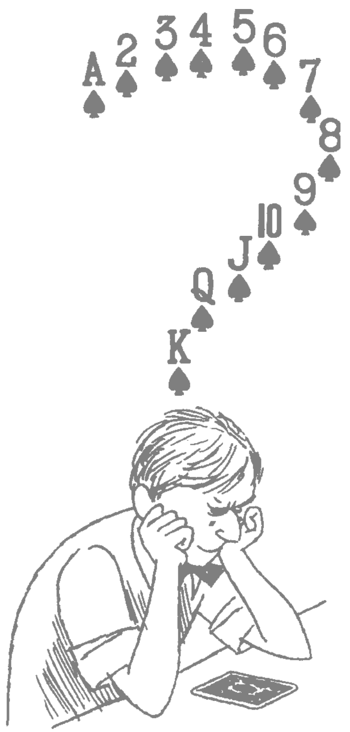


图 3 意料之外的黑桃悖论

假定你的朋友先放下黑桃 A 你能在他未放牌之前便推测到

他会放下黑桃 A 吗？他一定不会放下黑桃 2 以免输掉一千元的赌【16】注，所以放下来的一定是黑桃 A.你报了点数之后,他就说‘ 对 ”.那么你是不是真的完全靠推理而赢了一千元赌注呢？

令人想不到的是，你并不能声称你完全是凭逻辑的推测而赢得这项赌注的.这就是这一个悖论的神秘之处.你以前做的推测所根据的先决条件是这两张牌是黑桃 A 和黑桃 2.这一次你的推测也是根据同一个先决条件，不过又加了另一个条件：假定你的朋友说的是真话.用实实在在的话说，这个条件就是他会尽其所能不付给你一千元.但是既然你将推测得到他会放下黑桃 A,所以不论他放下哪一张牌都是输.他也就没有充足的理由一定要先放下某一张牌！如果你领悟到这一点，你就会明白你的推测说第一张牌是黑桃 A 便没有什么把握了.当然猜黑桃 A 是比较聪明的，而且也很可能就是黑桃 A.但是要赢得让人服贴，你必须要用铁的逻辑来证明你的猜测.这却是办不到的.

事实上你已经陷入了自相矛盾的恶性循环的泥沼里.一开始，你假定你朋友所说的都会付诸实现.根据这个假定，你推测他放下的牌是黑桃 A.如果真的是黑桃 A，那他所讲的话就是假话了.可是，他的言词如果真的完全不能相信，那么你连如何去猜牌的点数都变得毫无根据了.而且如果你猜不出牌的点数，他讲的话就被证实是真话了.故而只好再从头开始继续在这个圈子里绕来绕去.在这一点上，情况颇类似于英国的大数学家朱尔丹①在 1913 年提出的有关两张卡片的那个有名的悖论所形成的恶性循环(见图 4).由于用这种方法来推测，真像狗咬自己的尾巴一样不会有任何结果，所以你无法根据任何合乎逻辑的办法来推测桌上放的是哪张牌.当然你可以“ 猜 ”到桌上那张牌的点数.即使你很了解你的朋友,认为他放黑桃 A 的几率最大,可是如此的‘ 猜测 ”,

① P. E. B. Jourdain.

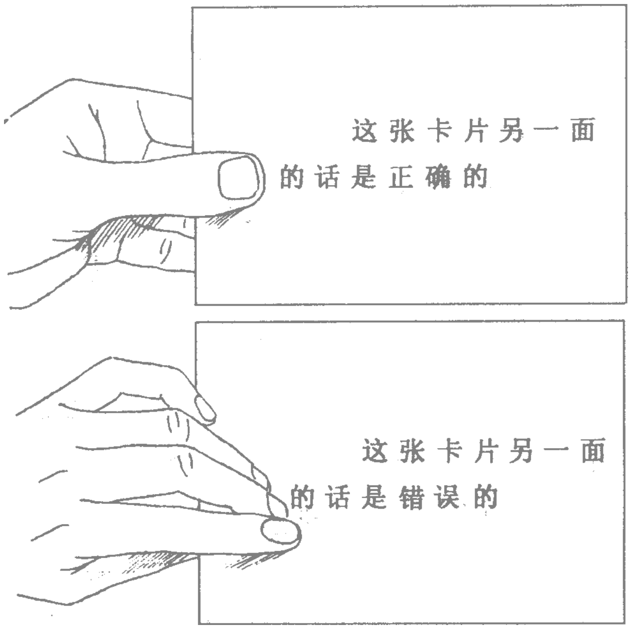


图 4　朱尔丹的卡片悖论

是不会被其他任何自重的逻辑学家所接受的.

[17] 让我们再回到十个盒子的例子上来分析你的推理基础是如何的脆弱. 首先,你"推测"鸡蛋会在第一个盒子里. 但是第一个盒子是空的. 于是你又"推测"这鸡蛋是在第二个盒子里,可是第二个盒子又是空的. 接着又"推测"它在第三个盒子里. 依此类推.(似乎盒子里的蛋在你正要打开盒子来看之前，就通过什么暗道逃到下一个盒子里去了似的.)最后,你终于在第八个盒子里看到被你"推测"到的蛋. 这真的是你推测到的吗？你用来推测它在第八个盒子里的方法真是无懈可击吗？显然你不能这样说. 如果你用正确的方法来推测，为什么会一连有七次错误呢？事实是，这枚鸡蛋可以在任何一个盒子里，包括最后一个盒子在内.

即使在你打开了九个空盒子之后,到底你能不能"推测"到蛋在

第十个盒子里，还是没有确切的答案. 如果你只接受第一个先决条件 某一个盒子里有蛋,那么你当然可以推测到蛋是在第十个盒子里. 在这种情形之下,蛋的出现正是你预期的而不是‘意料之外’的，而说它是‘意料之外’这个断言就被证明非真. 如果你同时又认为你朋友说的会有一个“意料之外’的蛋是真的,那你就无法作任何推测【18】了. 因为根据第一个条件你能推测到蛋在第十个盒子里，而第二个条件又告诉你会出现一个“意料之外的蛋”. 在一切都无法预期的情况下,第十个盒子中的蛋反而变成了‘意料之外’的蛋,而两个先决条件都被证实为真. 但是这个证实的来到是先要打开所有的盒子而发现蛋在最后的盒子里.

再回到判绞刑的罪犯的故事. 这个悖论的解决也可以作如下的总结：法官的判词无可挑剔，只是犯人的推理有误而已. 他那一连串推理的出发点——绞刑不可能在最后一天执行——是不正确的. 即使到最后一天的前一个晚上，正好像打开了九个空盒子之后而推测蛋在最后的盒子里一样，犯人仍然没有根据作任何的推测. 蒯因先生 1953 年发表的那篇文章中主要的一点正是这个论断. 在他那篇文章的结尾处他认为“罪犯的思路应该如下：眼前有四种可能性，第一，我现在就已经知道第二天中午会被执刑(但是我不知道)第二,我现在就知道第二天中午不会被执刑(但我也并不知道)第三,第二天中午不会执刑,但是我目前不知道 第四,第二天中午会执刑,但是我目前也不知道. 最后的两个可能性是一直存在的. 最后的一种情况完全符合法官的判词，故而他的判词便被证实无误，毫无自相矛盾的地方. 所以我还是不要去说法官自相矛盾，也不再作判断，只希望苍天能保我一命”.

苏格兰的数学家奥贝尔尼先生①也在 1961 年 5 月 25 日的《新

① Thomas H.O' Beirne

科学家周刊》①上发表了一篇文章.这篇文章的标题有点怪.标题是“意料之外的事一定不会发生吗？”这篇文章也给这个悖论作了很好的分析.他说，要圆满地解释这个悖论，首先要了解的一件事是，任何一项未来才会发生的事件会不会照预测此事的论断发生，可能只有某一个人心里有数，他知道这个论断是否为真，但是对于另外的人来说在事件没有发生之前是无法预知的.我们可以举一个很简单的例子.一个人给你一个盒子,同时说“打开盒子,里面有一个蛋.”这句话真不真,他心里有数.但是在你没有打开盒子之前是无法推测的.

我们所讨论的悖论也是一样.法官的判词；一个人放蛋在盒子里；你朋友手中的十三张黑桃——他们对自己所作的叙述都心里有数.可是他们说的都不能被用来作为反驳将来发生的情况的逻辑根据.用他们的话来驳斥他们正像朱尔丹的两张翻来覆去都讲不清楚的卡片一样，是完全无效的.

我们可以用史克利文下面的提示来把这个悖论返回其本质.假如丈夫对妻子说“亲爱的,在你明天的生日里,我会给你一件让你惊奇的礼物，是你完全意料之外的.你一定猜不出来是什么.那就是你那天在一家大首饰行里看到的金镯子.”

可怜的妻子心里该怎样想呢？她知道自己的丈夫是言出必行的.可是真的给她这副金镯子，这就不再是令她惊奇的礼物了！那他的话就有了出入（用逻辑学术语说，即是丈夫这句话已被证伪——译注）.既然他的话会有出入,那怎么可以凭他的话来作任何推测呢？他可以遵守给她金镯子这个诺言，但同时一定违反了所谓“意料之外”的誓言.再不然,他可以给她另外的一项礼物,譬如给她一台真空吸尘器等等,以便守住‘意料之外’的誓言,但是这样就违反了关于金镯子的誓言.丈夫的话既然有自相驳斥的语病，所以妻

① *The New Scientist*.

子对于可能发生的情况是没有合理的基础来预测的；她也没有理由相信一定会得到金镯子。当然她可以猜猜看会是什么礼物。生日那一天她真正惊奇地收到了在逻辑上来说是意料之外的金镯子。

丈夫知道他会照自己讲的话去做。但是在事情没有发生之前，妻子是无法知道的丈夫昨天讲的话在昨天还无法得到正确的意义，使得妻子被逻辑上的矛盾弄得晕头转向。可是当她今天收到这副金镯子的这一刻，一切的矛盾似乎又烟消雾散了。以上，我们花了那么长的篇幅讨论这个悖论，其中由于语句而带来的矛盾，令人头昏脑涨。但是说穿了之后，只不过是简简单单用一副金镯子作礼物的故事而已。

增注

这个无法预期的死刑带来了许多的读者来信，有的尖刻，有的表示迷惑，也有的提供他们对这个悖论不同的看法和答案。有些竟【20】演绎成长篇大论，被我列在本章的参考书目中。（通常我每一章只选几篇有关的参考资料，但是我相信这一次许多读者一定希望能得到尽可能详尽的参考资料。）

有一位在瑞典斯德哥尔摩的瓦斯特马姆兹学院①教数学的爱克朋先生似乎追溯到这个悖论的始作俑者。他说，在 1943 年或 1944 年瑞典广播公司宣称，瑞典的自卫队将在下星期举行一次军事演习。为了要试测各单位的警惕性和效率，演习的日期将秘而不宣，甚至直到举行日的清晨也不会宣布。爱克朋先生领悟到这件事牵涉到逻辑问题，是一个有关逻辑的悖论。他便召集了一些学生在斯德哥尔摩大学里公开讨论。1947 年，有一位当时参与该项讨论的学生来到普林斯顿，听到著名的数学教授哥德尔先生②也提起这个逻辑悖

① Lennart Ekbom at Östermalms College in Stockholm.

② Kurt Gödel.

论的另一种说法.爱克朋先生说，他本来以为这个悖论早过自卫队演习的故事，但是当他听到蒯因先生说这个悖论发生在 40 年代早期时,他相信他的故事可能是最早的一个.

下面的两封信并不讨论如何为这个悖论找答案，可是却带来了一些有趣(也令人迷糊)的花边新闻.两封信全登在 1963 年 5 月份的《科学美国人》月刊上的读者来信栏中.

执事先生大鉴：

加德纳先生的大作讨论‘意料之外’的蛋之悖论时,似乎循逻辑的常理，这只蛋根本不可能出现在任何一个盒子之中，但是却令人大为吃惊地出现在第五个盒子里.乍看之下,这是一个令人不解的矛盾.其实,仔细地分析之下,这个蛋一定会出现在第五个盒子里.

证明如下：

假定 S 是包含所有‘命题’的集,T 是所有‘真命题’的集.

那么任何一个命题,如果不在 T 集之中便一定在 C 集之中(C = S − T,即 T 集的补集),而不可能同时在两个集中.

现在来考虑下面的两项命题：

(1) 在这个长方块里的命题都是 C 集中的一员.
(2) 这只蛋一定在第五个盒子里.

上述第(1)条命题不是在 T 集之中就是在 C 集之中,不可能同在两个集之中.如果(1)是 T 集中的一员,那它所说的便是真的，也就是说所有在上面这个长方块里的命题都是 C 集中的一员.所以若(1)为真,那么它既在 T 集中,又在 C 集中，以上两个结果互相矛盾.

如果(1)是 C 集中的一员，则有两种情况要考虑.一个情

况是(2)在 C 集之中，另一个情况是(2)在 T 集之中.

若(2)是在 C 集之中,则(1)和(2)两个命题,即长方块中所有的命题都是 C 集中的成员，这正是命题(1)所断定的.它的断定既然是真的，它就应该在 T 集之中.故而当我们说(1)和(2)均在 C 集之中时，也就蕴含说(1)命题该在 T 集之中,这又是一个矛盾.

若命题(2)为真(命题(1)是在 C 集中),那么命题(1)的断定“在这个长方块里的命题都是 C 集中的一员”又因为(2)在 T 集中而被否定为不真.所以命题(1)不真，而它本来就是 C 集中的一员.这是无矛盾的.

总而言之，只有命题(1)是在 C 集之中而命题(2)是在 T 集之中才不会有矛盾出现.所以命题(2)一定为真.

因此，这个蛋一定是在第五个盒子里.

在第五个盒子里发现这个蛋是天经地义的事.

乔治·瓦利安
大卫·S·伯克斯
于斯坦福大学
加利福尼亚州斯坦福市①

执事先生：

加德纳先生所介绍的那个将被处绞刑的悖论读起来趣味盎然.我不能自禁地假想，如果这个罪犯是统计学家的话，他【22】一定会选择星期三，即判刑后的第四天作为他服刑的一天.法官要是在七天中任选一天的话，那么他要等 x 天之后才服刑

① George Varian and David S. Birkes at Stanford University in Stanford, Calif.

的几率是 $p(x)=\frac{1}{7}$.这就是说七天之中的任一天服刑的几率都相等.下面是等待时间分布之超几何公式的通式，而我们的计算只是这公式的一个特例而已.

$$p(x)=\frac{\left[\frac{(x-1)!}{(x-k)!\,(k-1)!}\right]\cdot\left[\frac{(N-x)!}{(N-x-h+k)!\,(h-k)!}\right]}{\frac{N!}{(N-h)!\,(h!)}}.$$

式中 $p(x)$是进行 x 次独立审判中获得 k 次胜诉的几率,这里假定在 N 个事件中随机地分布着 h 个有利事件.在我们所讨论的悖论中，$N=7$, $h=k=1$(因为只要胜诉一次就够了),所选的只有一天，故而 x 的期望值也就是平均值,即 $\frac{1}{7}\cdot(1+2+3+\cdots+7)=4$.所以执刑要等 4 天.当然有些读者又会申诉说，这样来算，星期三变成了“意料之内”的日子了！这行不行呢？

米尔顿·R·塞勒

于俄亥俄州沃星顿①

① Milton R. Seiler, Worthington, Ohio

第 2 章
组结和波若米欧环

许多人都看见过这种奇特的衔接在一起的三个圆环．以前有某一名厂的啤酒曾用它做商标（见图 5）．文艺复兴时期意大利的波若米欧家族用它做军服及盾牌的纹章，故而有时也称之为波若米欧环．

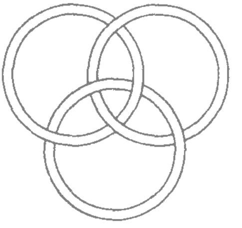


图 5　三连波若米欧环

这三个环虽然都拆不开，但是其中的任何两个并没有套在一起．如果有办法拿走其中的一环，其他的两个也就自然地分开了．

我写的《潇洒数学小品集锦第一集》①中有一章是讨论用纸做拓扑曲面的模型．那时我曾说过，在那些纸做的模型中，我还没有看见过这样一个环它只有一个侧面，本身也不互相交叉，而且它的边像波若米欧环一样连接．“或许，’我写道，

① *Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*.

“一位聪明的读者能帮我做出如此的模型.”

1959年的秋天,一位郝佛曼先生①,他那时是麻省理工学院电【24】机系副教授,接下了这项挑战.他不但做出了好几种各不相同的模型,每一个模型的边都是波若米欧环,而且由于他做了很多种,因而发现了一些简单而又美妙的方法使其所做出来的模型各以不同的纽结为边.这些纽结或相互交错，或结而为一，或以不同的方式相衔接.后来他又发现，他找到的各种方法早在1930年间就被一些拓扑学家们所熟知.可惜这些细节都写在德文书籍中,所以除了专门搞这一门的学者之外，一般的读者都无缘得知.

在我们引用郝佛曼先生的各种方法到波若米欧环之前，让我们先从一个不太复杂的例子说起.空间内最简单的封闭曲线当然是一条自身不打结的曲线,即数学家们定名为零次交叉的纽结,正如他们将一条直线定名为曲率为零的曲线一样.图6中的第一个

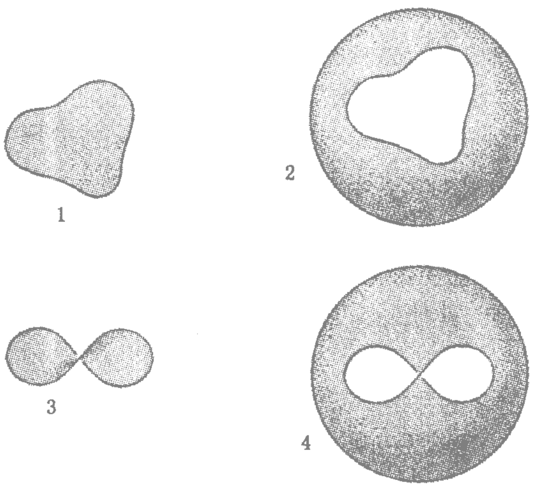


图6 以不打结的曲线为边缘的曲面模型

① David A. Huffman

画有阴影的图形便是一个如此的曲线图形.它是一个有两个侧面的曲面图形，它的边是一条封闭曲线.这样的一个平面图形很容易用剪刀从一张纸上剪出来.其实，剪出来的曲线形状如何无关紧要，紧要的是这条曲线必须是一条简单的封闭曲线.这里还有另外一个画阴影的方法，那就是画在曲线的外面（如图 6之 2).同时让我们假想这个图形是画在一个圆球的球面之上，那么这一条封闭的曲线好像是球面上一个小洞的边.这两个模型——即剪出来的平面图形及圆球上的小洞——从拓扑学的角度来看是等价的.将它们两个依洞边曲线黏在一起就变成了一个封闭圆球的表面.

现在让我们把问题弄得复杂一点.首先假想那个曲线是一条绳子,中间扭了一下(图 6 之 3).将那交叉的地方绳子的一段从另一段下面穿过，就好像公路上的高架立交道一样.这一条曲线【25】仍然是零次交叉的纽结，因为只要一抖，那看上去交叉的地方便消失了.（所谓一个纽结有若干次交叉，就是在经过不论多少次变形之后仍然留下来的交叉次数.)跟刚刚一样,我们用两种不同的方法来画阴影，而且凡是有共同边线的两部分就用不同的颜色来分辨.可以用不同的方法，得到这样的图形，只要把颜色互换就可以了.

我们用如图所示的方法给图 6之 3 打上阴影,那么这个模型就和一张扭了半个弯的纸很相似.它有两个侧，而且从拓扑学的角度来看,它和图 6之 1 和图 6 之 2 的图形是完全等价的.但是如果用图 6之 4 的方法来画阴影，白色的一部分可看作是圆球上的洞.我们现在所得到的曲面就是莫比乌斯①面.它的边仍然是零次交叉的纽结(就是没有打结),但是它只有一个侧,所以它和图 6 中的其他图形从拓扑学的角度来看是完全不同的.如果把图

① Möbius

6之3和图6之4两个图形再拼凑在一起，就成为一个没有边的、封闭的曲面.（拓扑学中证明了它是不能在三维欧氏空间中实现的，就是说，只可以想像但是实际上做不出来.——译注）这又称之为射影平面①,它只有一个侧.如果要它不自相交叉，它是无法做成的.

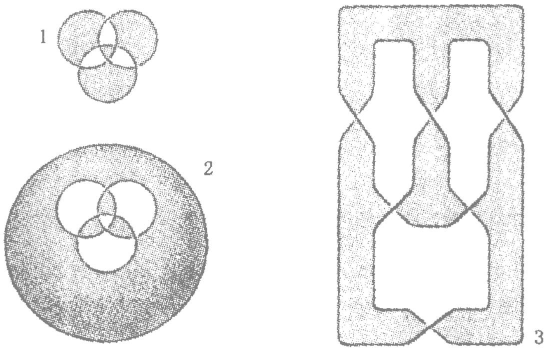


图7　以波若米欧环为边之单侧曲面的拓扑等价图形

上面所讨论的方法可以应用在以任何纽结为边，或以一组以任何方式相衔接的纽结为边的图形上.现在让我们看看如何做以波若米欧环为边的图形.第一步是将这三个环画成一组立交道图，每一个立交口只能有两条路相互穿过.第二步是用两种不同的方法将阴影画出来,如图7的1、2所示.交叉的地方也正是纸平面(有阴影的地方)打半扭的地方,其扭转的方向如图所示.只有一侧的平面图(图7之1)很容易用一张纸做出来.或者如图7之1那样对称而且均匀的图形也可以做成如图7之3所示的拓扑等价形.图7之2模型是圆球似的洞，它的边是三个波若米欧环，看上去似乎和图7之1的模型不一样,其实,它们是拓扑等价图形.要注意的是，用这两种画阴影的方法有时会得到等价图形，而有时得到的

【26】

① projective plane.

图形并不等价.

可以证明，上述双重施影法可应用于任何我们所希望得到的纽结或纽结群体，不管它们以如何次序、如何方式相衔接一般讲来用这个方法所得到的曲面多半是单侧的.有时可以将图中扭转的地方略加以调整而得一个双侧曲面，不过大都很难看出来要如何调整才行.下面这个方法也是郝佛曼发现的，可以保证一定得到一个双侧的曲面.

让我们再用波若米欧环为例.第一步,用铅笔轻轻地将三环图画出来.画好之后，将铅笔尖放在图上的任何一点，沿着圆环将这个图重描一遍，不论朝哪个方向转都可以.一直又回到出发点.每到一个交叉点，就画一个小箭头说明重描时所走的路线的方向.用【27】同样的方法重描其他的两个圆.其结果如图 8之 1所示

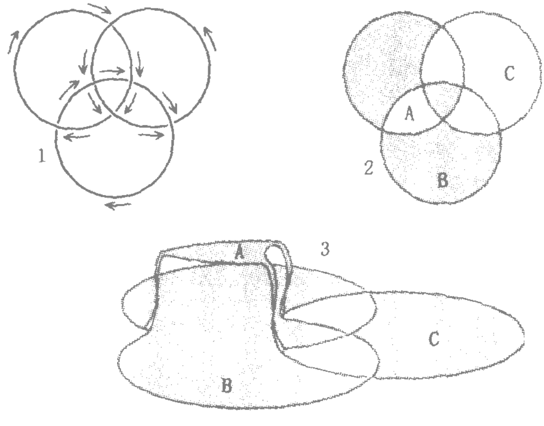


图8 以波若米欧环为边的双侧曲面的做法

现在再用铅笔或蜡笔将图加深.可以从任何一点开始沿着曲线依箭头方向前进.每逢到交叉口,可以随意朝左或朝右转,只要依着箭头方向就行.如果再碰到交叉，就照上述的方法前进.正好像你开车过立交道，既可以走立交道的上面，也可以走立交道的下面，只要跟着其他的车子走就行.如此走一圈之后终于又回到出发

点.现在提起铅笔或蜡笔由另一点再开始，一直到整个图都走遍为止.有趣的是，照这个方法所走过的封闭路线是不会和其他的路线交叉的.重描后的结果如图 8 之 2所示.

每一条封闭的曲线围住了纸上的一小片区域.当两个不同的区域相互挨着时，交叉点就表示把曲线做半个扭曲（其扭转的方向如原图之箭头所示）.有时一小块区域似乎在另一块区域的里面.我们将小的一块升起一层，本来的交叉点看作是扭转点，小区域向上抬之后就把交点看作扭转后的支柱.完成后的模型如图 8 之 3所示.这样一个图形有两侧，而其三条边正是波若米欧环.可以证【28】明，凡是用这样的程序做出的图形都是双侧的.所谓双侧的图形，就是这个图形可以用两种不同的颜色来涂而彼此不会相混，或者说可以用两片颜色不同的纸来做.图 9 是郝佛曼先生所提供的,它以赏心悦目的对称方式来表示如此的图形.

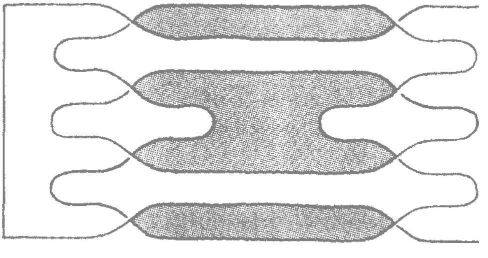


图 9　以波若米欧环为边的双侧曲面

读者们或许有兴趣以不同的纽结，或者以不同的相连线条来做此类图形的边.例如以 8 字结为边所做的图形就是一个对称而且相当好看的图形图 10 之 1 就是以 8 字结映射为曲线来表示的方法之一.顺便提一下，在讨论纽结理论时大家都用这种曲线描述法来求得每一种纽结的代数表示式.所谓等价纽结,就是其中一种纽结经过不同的变形之后可以转变成另一种纽结.等价纽结一定有相同的代数表示式，可是代数式相同的两个纽结却不一定是等价的纽结.当然，在这里总是先假定纽结乃是三维空间中的封闭曲

线.不打结的长绳，或者是四维空间中的封闭曲线都是可以松开的,也都不能看作是纽结.

8 字结乃是各种不同的纽结之中唯一可以化为只有四个交叉点的纽结.三花结是唯一只有三个交叉点的结.和三花结不同，8 字结没有镜像对称，它可以经过变形而成自身的镜像.所以 8 字结又可以称为‘双手性’的纽结,就是说它没有左手与右手之分,好像是一只橡皮手套可以将里面翻成外面.

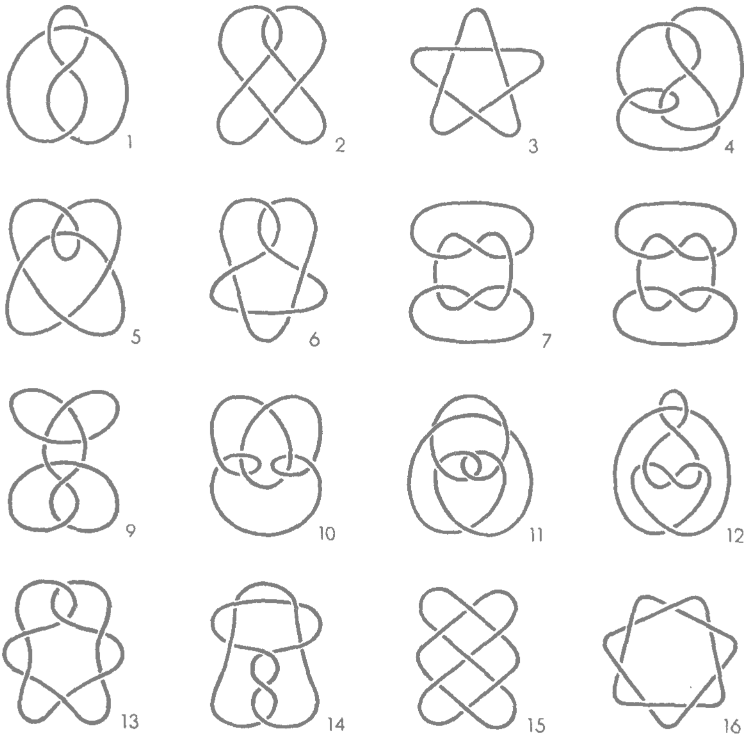


图 10　有四个交叉点(1),五个交叉点(2,3),六个交叉点(4—8)及七个交叉点(9—16)的纽结

只有一个交叉点或两个交叉点的纽结是不存在的.五个交叉点的纽结有 2 个,六个交叉点的纽结有 5 个,七个交叉点的纽结有【29】

8 个(请参阅图 10). 图中没有包括镜像对称的纽结，但是包括了可以经过变形而转化为相似的纽结. 相似的纽结都排在一起. 所谓方结(图 10之 7) ,乃是一个三花结与其镜像的"乘积". 它旁边的纽结(图 10之 8)称之为"奶奶"结 ,是两个"手性"相同的三花结的"乘积". 第3 个纽结和第 16 个纽结十分简单，你只要用一张纸条半扭五次再把两端黏贴起来，它的边就是前者；要成为后者则要半扭七次.

这 16 个纽结除了第 7 个结之外，画它们的图解时，其交叉点可以交替地向上或向下. 但第 7 个纽结不然,它的交叉点并非交替地向上或向下（注意：左边两个交叉点都是向下，右边则有两个连续向上的交叉点.——译注）. 当交叉点不超过八个之前，只有三种纽结的图解其交叉点能上下交替. 超过八个交叉点之后,各纽结一定可以交替地向上或向下.[30]

读者也许会问,第 7 个结即方结,和第 8 个结即"奶奶结",都是两个三花结的组合，被看作两个相似的纽结；为什么用三花结和 8字结组合而成的第 9 个结却没有另一种相似纽结呢？这个问题的答案是,第 9 个结的 8 字结部分可以变形为其镜像对称，但是在更改时，上面的三花部分的手性仍然不变. 所以它和它的镜像对称可用同样的图来表示.

一个纽结，经过变形之后其交叉点无法减少者，称为原始纽结. 图 10中,除了 7,8,9 三结之外都是原始纽结. 所有交叉点低过 10 的原始纽结都已被人一一列表绘出. 但是没有一个公式可以用来计算出,当交叉点为 n 时到底有多少原始纽结？大家都认为有 10个交叉点的原始纽结共有 167 个. 但是有 11 个交叉点或 12 个交叉点的纽结各有多少种原始纽结仍然只有众说纷纭的猜测.

纽结和拓扑学之间的关系显然很密切，所以纽结的理论和拓扑的理论一样，两者都存在许多至今仍然未曾得解而且纠缠不清的问题. 两个纽结是否互相等价，甚至于一个纽结是否为另一个纽

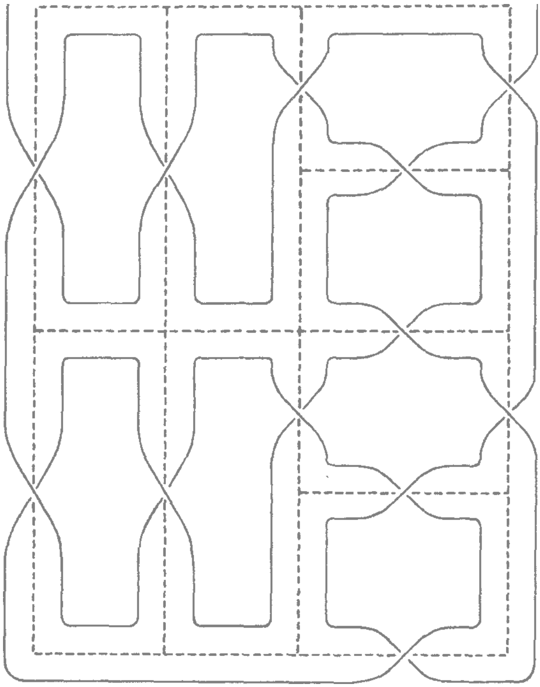


图 11　一个单侧、单边界的曲面，它的边是否打结？

结的一部分，一大堆缠在一起的空间曲线到底本身是不是一个纽结，都没有一个通用的方法来决定。我就想出了图 11 中的图形来显示以上这些问题的难度。图中这个看上去很奇怪的图形是单侧的，也只有一个边，像是一个莫比乌斯带。请问，这个图形的边是不是一个纽结？如果是一个纽结，请问是一个什么样的纽结？大家不妨先仔细地看看这个图形再来猜测以上问题的答案。我们请读者来研究它，猜一猜，然后再用下面提供的经验方法验证预测的答案。先用纸作一个如此的模型，再沿着虚线剪开来。读者会得到一条纸带，它由两个相同的纽结连接在一起而成，纽结的边和原来图形的边一样。各位要小心地操作，不要撕破它，就可以转变成最为

简单的图形.之后你再看一下和原来所作的预测是否一样.最后的答案可能会使你大吃一惊.

1860年英国的物理学家威廉·汤姆森先生①(后来受勋为凯尔文勋爵②）所提倡的原子论认为原子乃是那不可压缩、没有摩擦而且充满宇宙的无所不在的以太漩涡.而另一位物理学家也叫汤姆森(电子的发现者.——译注)③,则认为这些漩涡型原子连在一起所成的纽结便是分子.从此许多物理学家对拓扑学发生了兴趣，[31]其中的著名者如苏格兰的物理学家泰特④.但是当漩涡论被人推翻之后,这方面的兴趣就渐渐减低了.直到最近各种新的化合物被发现,其中环状的碳分子以不同的方式相互串连而结合,这方面的兴趣可能会再度受人关注.现在从理论上来说,用不同的碳分子的闭链以各种稀奇古怪的方式相互扭结可以合成出种种的化合物.瓦塞曼先生⑤在1962年11月份的《科学美国人》月刊上写了一篇《化学拓扑学》⑥的文章,值得参阅.甚至有人确信如果碳分子全以8字结相连，其所合成的化合物会有些什么特性都可以预先臆测.说不定有些碳分子会分成三环而以波若米欧环的方式相连接呢.

有机体大概不会自己打结吧？这并不一定.印第安纳大学有[32]一位微生物学家布洛克先生⑦在《科学》周刊⑧上报导,他发现的一种微生物其形状像一条条长带，而其繁殖的方法就是打成不同的结，可能是交手结、8字结、奶奶结或其他简单的结.越结越紧挤成一团之后，长带的另一端就分裂出来，又变成另一个微生物.金生

① William Thomson.
② Lord Kelvin.
③ J.J.Thomson.
④ Peter Guthrie Tait.
⑤ Edel Wasserman.
⑥ Chemical Topology.
⑦ Thomas D. Brock.
⑧ *Science*, Vol. 144, No. 1620 (May 15, 1964), p 870—72.

先生①在 1966 年 2 月份的《科学美国人》月刊上写了一篇文章叫《田鱼》②，他说这种鱼像鳗鱼一样会将自己打成反手结来清除身上的粘液,并做一些其他稀奇古怪的事.

人呢？人体中有没有什么器官会自己打结？这只好让各位把臂——把手臂打成结——思考了.

答案

用纸做出图 11 中的图形,并且沿着虚线剪.它会变成一个个没有头也不相打结的长环.这就证明原图的边并没有打结.这个曲面是这样设计的，它的边相应于一个伪结，变戏法的人称之为 Chefalo 结.要做这种结，先得打一个方结，然后把结的一端从结中穿过两次,两端一拉这个结就散了.

【33】

① David Jensen.

② The Hagfish.

第3章
超越数 e

说起小 e 真淘气，
行为古怪又稀奇.
非我故意说坏话，
生性自然是痞底.
——灵顿①所写的一首四行短诗

π 和 ϕ （黄金分割比）是数学中两大重要的常数.这两个数的种种娱乐性的特性,在我以前的《科学美国人》月刊的专集各书中都已讨论过.现在要讨论的是 e，也就是数学中第三个重要的常数.它虽然不如前两个那么为人所知，可是对学习高等数学的学生们来说,它几乎是处处可见,其重要性也与前两者不相上下.

要了解 e 的基本性质，最好的方法是研究各种事物的增长过

① J. A. Lindon

程. 假如你在银行里存入 1 元钱,年利为 4 厘(百分之 4),每年银行会付给你四分钱利息. 所以二十五年之后,1 块钱就增长为 2 元钱. 假定银行答应给你复利,这一元钱的增长应该会更快些,因为[34]每一期的利息又能加在本金上再度生息. 第二期的利息便会稍为大一点. 如果复利的计算次数越多,这一元钱的增长也会更快些. 假定复利是按年计算,那么二十五年之后,这 1 元钱就变成了 $\left(1+\frac{1}{25}\right)^{25}$,即 2.66 元. 如果每六个月算一次复利. 因为年息是 4 厘,所以六个月的利息是 2 厘),那么二十五年之后,这 1 元钱便成长为 $\left(1+\frac{1}{50}\right)^{50}$,即 2.69 元.

许多银行所发的宣传小册里,常常强调该银行计算复利的次数很频繁. 这可能给人一个印象,以为复利计算的次数很多的话,存进去的钱一定也会增长得更快. 譬如,一年里计算一百万次复利,那么二十五年之后,1 元钱必然会变成一笔可观的财产. 实际上却大不为然. 因为二十五年之后这一块钱的总成长是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$,式中的 n 就是二十五年里计息的次数. 当 n 的值趋近无穷大,上一个公式的极限值只不过是 2.718…而已,比半年算一次复利不过只多 3 分钱都不到. 2.718…这个极限值就是 e. 不管银行付的利息有多大,以单利计算的话,在 1 元钱可以变成 2 元钱的同一段时间内,即使连续不断地以复利计算,这一元钱也只不过变成 e 元钱而已. 实际上,把钱放在银行里,即使利息很低,只要存放的时间长一定会变成相当大的一笔数字. 譬如在公元第一年,以每年 4 厘的年利,并按年计算复利情况下存入 1 元钱,到 1960 年这 1 元钱便成长为 1.04^{1960}元钱,这是一个有三十五位的数.

这种成长的方式有一个特性:那就是增长率老是和总值成一定的比例. 也就是说不论在何时计算,它的增长率总是其总值的某一个比数. 正好像一个雪球从山上滚下来一样,不但越滚越大,而

且大得越来越快．这种增长又称之有机性的增长①，因为许多有机物的增长过程都有此特性．世界人门的增长率就是一个例子．除此之外，在物理学、化学或生物学，以及社会科学中有成千上万的例子显示类似的变化过程．

这些成长过程常用 $y = e^x$ 这个公式为基础来说明这个函数是如此的重要，以致于把它称作“真正的”指数函数来与其他的指数函数相区分,例如 $y = 2^x . e^x$ 这个函数和它的导数相等，就凭这【35】一个特点也就说明了为什么 e 在微积分中处处可见数学分析中全用自然对数(不是那种以 10 为底的常用对数),它就是以 e 为底的对数，e 是最自然的底．

假如你拿住一根链子的两端，而且让它自然下垂，这链子所成的曲线就称为悬链线②，如图 12 所示．这个曲线的方程用笛卡儿坐标来写，其中就会有 e 出现．帆船的帆被风吹满时，其横切面也是横过来的悬链线．因为水平方向的风施在这张帆上的力量正和地心吸力对自然下垂的铁链的作用是一样的．吉尔伯特群岛、马歇尔群岛及卡罗琳群岛都是海底火山的颠峰，海里的火山乃是巨量的玄武岩所构成，这些火山峰的平均剖面图也是

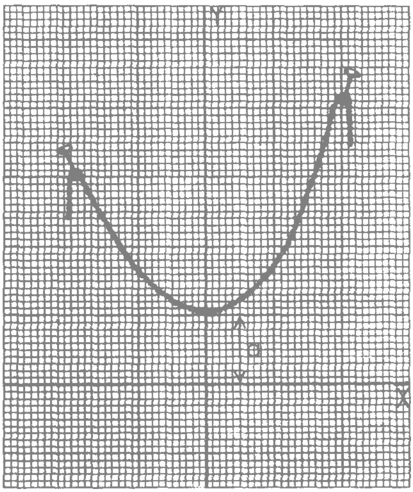


图 12　铁链自然下垂所形成的悬链线的方程是：$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$

① organic growth

② catenary curve

悬链线悬链线并不是圆锥曲线，虽然看上去和抛物线很相似．如果你用一块硬的纸板剪出一条抛物线，同时让它沿着一条直线滚动，这抛物线的焦点便依一条悬链线的轨道移动．

悬链曲线在自然界常可见到．法国的昆虫学家法布尔先生①在《蜘蛛的生活史》②一书中有一段很好的描述．他写道："'e'这个神奇之数化身为蜘蛛丝而现身．在一个有雾的清晨，让我们来看它在夜间所织成的这一道网一条条有粘性的蜘蛛丝，因为它们有吸【36】水性，所以挂在上面的一颗颗露珠将这些蜘蛛丝坠成许多悬链线．露珠线像念珠似的串成一串，当阳光穿过雾气照过来时，整个蜘蛛网上闪闪发光，好像一颗颗钻石．这可以说是 e 的最漂亮的显现．"

e 和 π 一样，是一个超越数那就是说它不能作为任何以有理数为系数的代数方程的根．就好像如果只用圆规和直尺③我们无法画出一段线段使其长度正好等于 π 的值一样．用同样的工具，在不违反这个限制的前提下，和 e 等长的线段也是画不出来的．

e 和 π 一样，可以用无穷连分式来表示，或以一个无穷级数的和④来表示．下面是用连分式表示 e 的方法之一：

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\cdots}}}}}$$

上面这个连分式是 18 世纪瑞士的大数学家欧拉⑤所发现的．

① Jean Henri Fabre.

② *The Life of the Spider*.

③这里应该加一个短注，即"经过有限次运作"．许多讨论用圆规及直尺作图的文章里常常漏了这个重要的限制 ——译注

④以前微积分的书中都是用"极限"一词，现在都用"和".——译注

⑤ Leonhard Euler.

他也是第一个用 e 这个符号的数学家（欧拉之所以用 e,很可能因为它是 a 下面的第一个元音,而 a 已经被用来代表另一个数了①. 他发现了许多 e 的特性,所以 e 也被称为欧拉数）.

如果我们将 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 展开，便会得到下面这个有名的无穷级数. 这个无穷级数的和就是 e:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$$

上式中的惊叹号'!'乃是阶乘的符号(3 的阶乘 $3!=1\times2\times3=6$, [37]4 的阶乘 $4!=1\times2\times3\times4=24$,以下依此类推). 这个级数收敛得很快,可以很快地将 e 算到任何位数之值,比算 π 容'e'得多② 1952 年在伊利诺大学的惠勒先生③的监视之下，一位电子计算器工程师曾将 e 算到六万位. 1961 年国际商业公司（IBM)位于纽约的数据研究中心的仙克斯先生和小芮奇先生④又将 e 的值延伸到小数点后 100 265 位！（这是真的惊叹号不是阶乘⑤.)正如 π 一样,一直有人将它们的值算下去. 而且到目前为止，没有人看得出这些数字的排列有任何有规则的模型可循.

这两个有名的超越数 π 和 e 之间有没有什么关系存在？有的. 实际上有许多简单的方程可以将这两个超越数连在一起，其中最有名的便是下面这个方程：

$$e^{i\pi}+1=0.$$

它是欧拉根据棣美弗先生⑥早期所发现的一个公式演化而来的.

① 也有人说 e 是欧拉姓氏的第一个字母 ——译注

② 这里原作者的原文是 "as easy as pie",好比我国的'好吃果子'正好 pie 这个字又是 pi(π)和 e 的合写. 故而译文中将容易的易改成 e. ——译注

③ D. J. Wheeler.

④ Daniel Shanks, John. W. Wrench Jr., at the Data Center in IBM

⑤其实完全没有什么可惊叹的. 就译者所知，东京的金田先生去年就已经将 π 值算到了十几亿位了. ——译注

⑥ Abraham de Moivre.

卡斯勒和纽曼先生在他们合写的《论数学及想像力》①中写道:“这个公式这么简洁，精干而且含意又如此丰富.我们只能将这个公式抄录下来，但是却无法在这里探索它的内涵.神学家、科学家、哲学家和数学家都想去了解它.”在这个公式里，数学中五个最重要的量,即 1,0,π,e,和 i(-1 的平方根）全联系在一起.卡氏和纽氏在书中又说这个公式给皮尔斯先生②带来极大的启示.“各位同学”,有一天他在黑板上写下这个公式之后就对他的学生们说，“这是正确不移的真理.令人感到极为迷惑的是，我们既不了解这个公式的真义，又几乎不知道它在讲什么，但是却能证明它.所以这必然是无误的真理.”

任何一个数 n 的阶乘,就是将 n 件物体作各种不同排列的方法总数.牵涉到排列的问题中会有 e 出现并不是太令人吃惊的事.各种排列的问题中最常被讨论的就是所谓拿错帽子问题：有十位客人将帽子存寄在衣帽间.经管的小姐十分粗心，在她将帽子还给客人之前也不好好地验个明白.请问十个人拿了帽子之后至少有一个人会拿到他自己的帽子的概率有多大？（同样的问题又会以不同的【38】方式出现.例如一位心不在焉的女秘书将一些信放进已经写好地址的信封里去.请问最少有一封信放进地址正确的信封里的概率有多大？再举水手的例子，水手们放假登岸，个个都喝得醉熏熏地回船，请问至少有一位水手能回到自己的舱位的概率有多大?）

在解决这个问题时，有两件事要搞清楚：十顶帽子有多少种不同的排列？这些排列中又有哪些是每个人都拿错帽子的排列？不同排列的总数当然是 10!,算出来是 3 628 800.但是谁会把这么多的排列全写出来，再从中找出哪些是人人都拿错帽子的排列呢？

① *Mathematics and the Imagination*; by Edward Kasner & James R. Newman

② Benjamin Peirce，哈佛大学的数学家，又是哲学家 Charles Sanders Peirce 的父亲.

巧的是有一个简单的方法,而且是一个很古怪的方法,将 $n!$ 用 e 去除，最接近该商数，但又不大于它的整数就是每个人都会拿错帽子的排列总数. 上面这个十顶帽子的问题中，这个整数是 1 334 961. 所以没有人拿对帽子的概率就是 $\frac{1\,334\,961}{3\,628\,800}$，即 0.367 879⋯. 这个数和 $\frac{10!}{10!\ e}$ 的值很近. 再将两个 10! 同时约掉的话，这个概率相当接近 $\frac{1}{e}$. 不管所有不同排列的细节如何,要不是每个人都拿错帽子,就是至少有一个人拿对帽子,所以将 $\frac{1}{e}$ 从 1 中减去,得到 0.632 1⋯. 这就是至少有一个人拿对帽子的概率. 几乎有 $\frac{2}{3}$ 的可能性.

帽子总数	排列的总数	每人都拿错帽子的排列总数	每人都拿错帽子的概率
1	1	0	0
2	2	1	0.5
3	6	2	0.333 333
4	24	9	0.375 000
5	120	44	0.366 666
6	720	265	0.368 055
7	5 040	1 854	0.367 857
8	40 320	14 833	0.367 881
9	362 880	133 496	0.367 879
10	3 628 800	1 334 961	0.367 879
11	39 916 800	14 684 570	0.367 879
12	479 001 600	176 214 841	0.367 879

图 13 错帽问题

这个问题有一个奇怪的特性.当帽子超过六顶或七顶之后，不论再增加到多少,对答案的影响都很小.至少有一人会拿到自己的帽子的概率都是 0.632 1⋯.不论是十个人十顶帽子或一百万人一百万顶帽子，都几乎一样.从上面的表中我们看到，每个人都拿[39]错帽子的概率很快地就越来越接近 $\frac{1}{e}$ 这个极限值，即 0.367 879 441 1⋯.从上表中最后一列小数可以看得出，这些数总是在变大和变小中依次交替.

以上所讲的到底对不对可以用下面这个单人游戏来证实.拿出一副牌，洗好之后一张张牌面向上发下去，一面发一面依预先约定好的顺序叫出牌的点数(例如黑桃 A,接下去是黑桃 K,等等.然后红心 A,红心 K 等等.然后方块、梅花等等).如果发出来的牌正好就是叫出来的牌,就算赢家.假如只要叫对一次就算赢家的话，请问你成为赢家的机会有多大？

我们很容易地看到，这和上面所讨论过的帽子问题是相同的.直觉上讲来大家都以为赢面不大.最大不会超过二分之一.其实，正如我们所讨论过的，赢的机会是 $1-\frac{1}{e}$ 即差不多是 $\frac{2}{3}$.这就是说，如果玩很多次的话，一定玩三次就有两次你会叫对牌.

把 e 算到小数点之后二十位,它的值是 2.718 281 828 459 045 235 36.这个数怎样记?①许多人拟造了好些句子，其中每个字的字母数恰好就依次是 e 的各位数.这种句子的英文叫做 MNEMONIC SENTENCE.原义就是帮助记忆的句子.(原文中介绍了好几个例子,此处全部从略.)

大家都知道用 $\frac{355}{113}$ 来代表 π 的值，可以精确到小数点后面六位.如果要用分数来表示 e 的近似值，同时又要精确到小数点后面

①从“这个数怎样记”起都是译者自己加进去的.——译注

六位的话，这个分数的分子和分母都至少要是四位数$\left(\text{例如}\frac{2721}{1001}\right)$.不过我们也可以用三位数做分子和分母，其精确度只能到小数点后面的四位数.这种用来表示近似值的分数，读者如果要下手去找,却也不容易找到.请问怎样一个分子和分母都是三位数的分数最接近 e 的值呢?①

增注

好些读者问我有没有注意到有许多问题其答案的全部或一部分会出人意料地与 e 有关.我在这里只介绍两个.1.n 是什么数时其 n 次方根为最大？答案就是 e②.2.如果在 0 和 1 之间任取一实数,包括 0 和 1 在内，每次取的数加在一起直到这些实数的总和会大于 1 为止，取数的次数之期望值是多少？答案又是 e③.

很多年以前，当我第一次看到欧拉将 π, e 和 i 写在一起的漂亮公式时，心里就在想有没有方法将这个公式用一条曲线画出来.我自己没有找到方法.但是有一位赫尔先生在 1959 年 10 月份的《数学公报》④上发表了一个又简单又漂亮的方法.他先把 $e^{i\pi}=-1$转变成一个无穷级数，然后在复数平面上用一连串的向量画出这无穷级数的每一项，如果该项中有 i 出现就把相应的项所产生的向量转 90°，于是就变成由逐渐变短的线段所产生的螺旋线.这个曲线可以在 1964 年 9 月份的《科学美国人》月刊第 59 页上

① 这种问题称之为丢番都逼近，是超越数理论中的重要问题.——译注

② 见 Heinrich Dörrie 所写的 *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, 359 页.

③ 参阅 *American Mathematical Monthly*, 1961 年 1 月号,18 页,问题 3.

④ L. W. H. Hull,"*Convergence on the Argand Diagram*", *Mathematical Gazette*, Vol. 43, No 345, p 205—7.

看到.

关于 π 和 e 还有一个不大被人讨论但也相当有趣的小问题.如果不查表,也不实际计算,请问 e^{π} 和 π^{e} 谁大?这个问题有好些方法下手.胡内基先生发表过一个解法①.

【41】

答案

分子和分母全是三位数,而又最接近 e 值的分数是 $\frac{878}{323}$.化成小数,它等于 2.718 26⋯,和 e 的小数点后四位数相等.(占星学家们请注意,这个分数的分子和分母都是回文数②,两者之差是 555.)将分子和分母的最后一位数都去掉,得到 $\frac{87}{32}$,这是用两位数作分子和分母的与 e 的值最接近的分数.

用分数来表示无理数的近似值,我本以为可以将这种方法加以解说.最早让我注意这个问题的是一位吉尔伯特先生③,但是我发现要讲清楚这个方法和技巧得费许多笔墨.有一位克莱斯妥先生写了一本经典的教科书《代数学》④.1961 年由多佛出版社重版,其中第 2 卷的第 32 章就是讨论这个问题的.此外,托马斯⑤在 1963 年 11 月份的《数学杂志》中也写了一篇专文讨论这个问题.有兴趣的读者可以参阅以上的资料.

【42】

① Phil Huneke,参阅 1963 年 *The Pentagon* 杂志的秋季刊,46 页.

② 即从左读到右或从右读到左都一样.——译注

③ Jack Gilbert of White Plains, New York.

④ *Algebra* by George Chrystal.

⑤ Paul D. Thomas, "*Approximations to Incommensurable Numbers by Ratios of Positive Integers*," *Mathematics Magazine*, Vol. 36, No. 5 (November 1963), p 281—89.

第 4 章
几何分割

有史以来第一个面临几何分割问题的麻烦的一定是几千年之前的原始人. 他手中有一块兽皮，足够做某一样东西，可惜形状不对，一定要先剪裁成几小块然后再拼缝起来才可以得到合适的形状. 要怎样才能使剪裁及缝合的工作最少？就是这么一个实用问题的答案带来了具有娱乐价值的，以及无穷无尽的使人绞尽脑汁的几何难题.

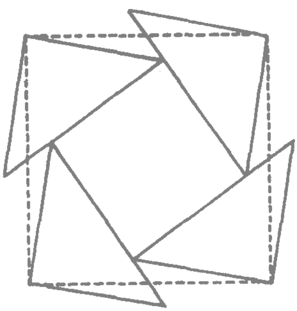


图 14　艾卜尔 · 维法的九块分割法

早在古希腊时代便已经出现了一些简单的几何分割问题. 但是第一本对这个问题作有系统的探讨的书，我相信是 10 世纪的艾卜尔 · 维法①所写的. 他是一位住在巴格达的波斯天

① Abul Wefa.

文学家.他的书只有一些零碎篇页流传下来，但是全部是精品.图14说明艾卜尔·维法是怎样将三个全等的正方形分割成九块之后再拼成一个大正方形的.

三个正方形中有两个依对角线分割为二，这四个三角形又沿着第三个正方形的四周排列，最后再沿虚线分割出小小的四块以完成整个分割过程. [43]

一直到20世纪，几何学家们才开始正视如何将某一图形分割成最少块.在这个领域中，英国的数学游戏大师杜丹尼先生①是领导人物.例如图15中,他对艾卜尔·维法的问题重新进行研究，发现只要分割成六块便可以拼成一个大正方形.至今这仍然是最好

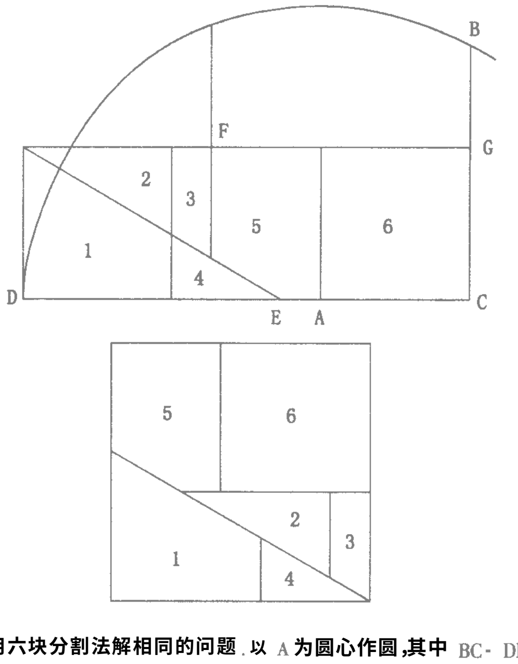


图15 用六块分割法解相同的问题.以A为圆心作圆,其中BC=DE=FG.

① Henry Ernest Dudeney.

的记录．

分割问题之所以引起当代许多爱解难题的人的兴趣，其中的[44]原因很多．原因之一是图形分割并没有通用的规则或程序可循，以保证分割一定成功．每个问题都要靠直觉或充分的想像力来处理．同时这些问题所牵涉到的‘几何学’并不深，所以业余者常常比专业数学家得到更好的答案．第二个原因是，图形分割之后，通常都无法证明其分割的块数不能再减少，所以好些历久不破的纪录时时都有被人打破的可能．

比当今任何人破过更多纪录的人——也是现今全世界关于这类问题最有声望的专家——是林格伦先生①，他任职于澳大利亚政府的专利局．他的研究范围包罗万象：以曲线为边的平面图形，

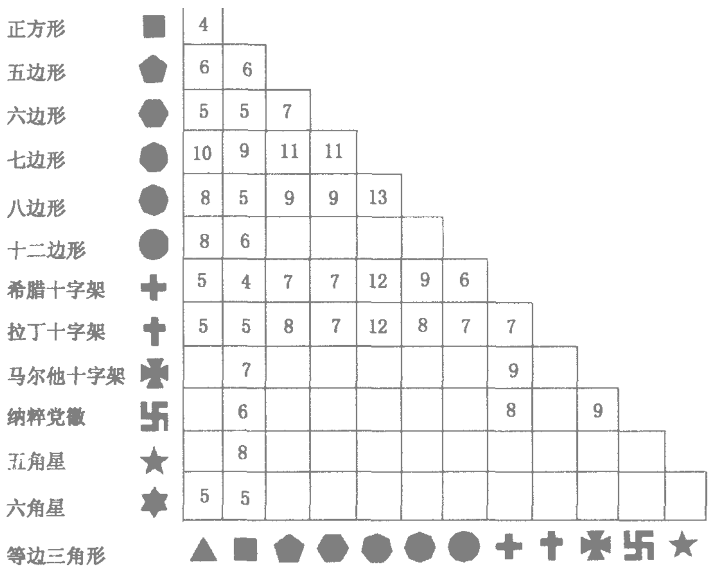


图 16 到 1961 年为止，几何图形分割的纪录

① Harry Lindgren.

立体图形（据我所知，还没有人研究过高维空间里的图形）.他致力最多的乃是各种多边形的分割.每一个多边形都可以分割成许多小块再拼成其他等面积的多边形，这是不难证明的.难的是如何使分割的块数最少.

图 16 也是林格伦先生所提供的.这是到 1961 年为止的分割纪录，牵涉到七种不同的正多边形，另外加上六种不规则但也常见【45】的多边形.横排和纵列相交的方格中的数目表示由一图形转变为另一图形所需的分割次数，也是当时所已知的最小分割数.如有必要，不对称的小块可以翻身.但是分割之后每一块都不必翻身的话，就被认为是较好的答案.图 17 中有五个令人注目的例子,其中有四个是林格伦先生所提供的；第五个是将一个马尔他十字架转变为正方形.杜丹尼先生认为制作者是一位叫希尔的先生①.图 17 中有林格伦先生将六角形转变为正方形的分割法.这与 1901 年杜丹尼所发表的那个更为人所知的分割法不相同.以不同的方法分割而转变图形的例子很多，分割块数也相等，但分割的方法常常迥然不同.图 17 中，十二边形转变为希腊十字架的分割法是林格伦的杰作.曾经发表在 1957 年 5 月份的《美国数学》月刊上的图 16 中的表【46】一定会随时间而更改,其中的空格也都会被填上,让我们拭目以待.

几何图形的分割该如何下手？这个问题当然无法在此详细讨论.林格伦先生曾发表了两篇专文介绍他所用的方法.这两篇有关几何分割的专文都发表在《澳大利亚数学教师》杂志②(1951 年第 7 卷 7—10 页和 1953 年第 9 卷 17—21 页).最近又有一篇文章发表在英国的《数学公报》③上,题为‘几何分割法再改进一步’④.

① A.E.Hill.

② *The Australian Mathematics Teacher*.

③ *Mathematical Gazette*.

④ Going one Better in Geometric Dissections.

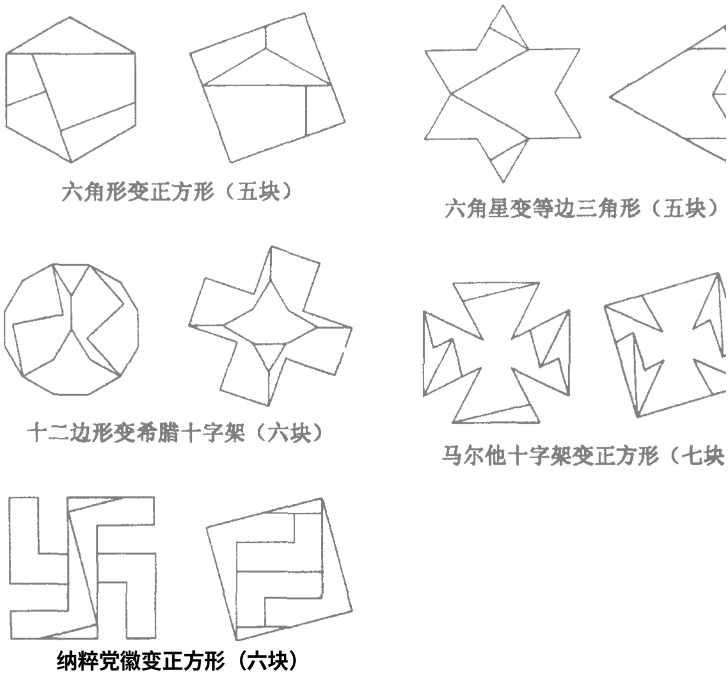


图 17 一些奇妙的分割

图18说明林格伦先生所用的方法之一，将一个拉丁十字架转化为正方形．首先，每一个图形（两个图形当然要面积相等）用简单的方法分割，目的是要使分割后的小块可以拼凑成一个上下平行的图形．三四个这种图形头尾相接便可以凑成上下平行的长条．

正方形当然不必分割便可以拼凑成一个上下平行的长条（如图中的虚线所示）．拉丁十字架只要分割成两小块之后便可以拼凑成平行的长条，即图中的实线部分．这两个平行的长条都可以各自画在透明的纸上然后互相重叠并用不同的方法旋转．要点是两个图形相交的两点必需是林格伦所谓的与另一图形“相重合”的两点．找到这个位置之后，则这两个长条的公共部分中的线段（实线

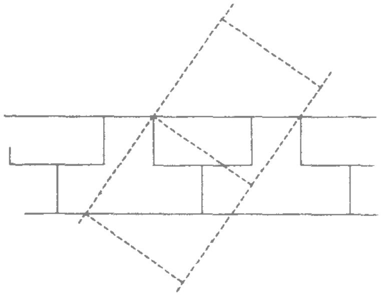


图 18　林格伦用长条法将拉丁十字架变为正方形的五块分割

或虚线）便是把一个图形分割成另一个图形的分割线.纸条可按不同的位置放置，直到得到最佳的答案为止.在图 18 中,分割的次数[47]是五次，所以林格伦先生就打破了分割六次的纪录.

林格伦的第二个方法应用的条件是两种多边形都可以用来作铺砌①的基本元素.例如一个八角形凑上一个小正方形便可以无限延伸地铺砌，如图 19 的实线图形所示.然后再用一个与正八角形等面积的正方形以及上面讲的小正方形，又可以作可无限延伸的铺砌，如图 19 中的虚线所示.把实线的铺砌和虚线的铺砌相重叠，便可以将八角形分割成五小块而拼凑成等面积的正方形了！这个分割法最早是在 1933 年由英国

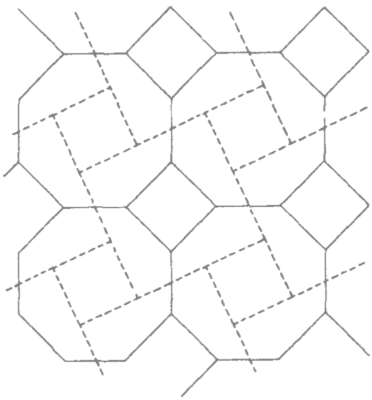


图 19　林格伦用铺砌法将八角形变为正方形的五块分割

①所谓铺砌就是用几种形状的图形互不重叠地、像铺砖一样地铺满全平面.—— 译注

解难题专家屈维尔斯先生①所发表的。

林格伦的杰出才能可以从下面的一些成就体会到。他曾将一个正方形分割成九块，既可以拼凑成一个拉丁十字架，又可以拼成一个等边三角形。他又将一个正方形分割成九块，既可以拼成一个正六边形，也可以拼成一个等边三角形。他还将一个正方形分割成九块，既可以拼成一个正八边形，又可以拼成一个希腊式十字架。他也发现如何将一个希腊式十字架分割成十二块之后再拼成三个相似但较小的希腊式十字架。“这个分割法要再改进不太简单，”他写道，并谦虚地指出在他之前杜丹尼的纪录是十三块。将一个希腊式十字架分割后再拼成两个相似但较小的希腊式十字架并不难。杜丹尼曾经分割五块而完成。他是不是也用林格伦的重叠铺砌法如今已不得而知。林格伦先生说希腊式十字架的分割用铺砌法最方便。图20便是用铺砌法——先用一个大十字架无限延伸地铺砌，同时一个小十字架也可以无限延伸地铺砌，将两个铺砌图形放在一起，杜丹尼先生的答案马上就显出来了。

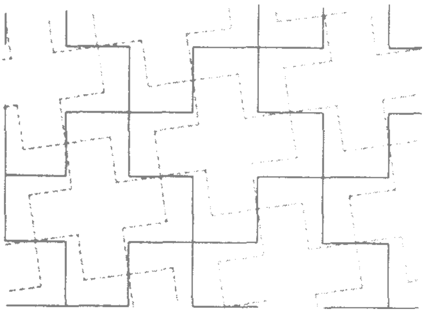


图 20　用铺砌法将较大的希腊式十字架变为较小的希腊式十字架

杜丹尼先生写道：“看到如此的图形仍然无动于衷的人是很少见的。自然界的美和井然有序总是令人欢悦的，尤其是能亲眼看见这种美、规律和秩序就更加动人心魄。即使是对数学毫无所知的人，看到这些图也会自然而然地叫一声‘好美’。我知道有好些人就是因为涉足这些分割图形的游戏而进一步去研究几何的。”

① James Travers.

增注

这一章的原文发表在 1961 年 11 月份的《科学美国人》月刊上．自从它发表之后，林格伦先生在 1964 年出版的他的名著《几何分割》①，可以说是这一篇文章发表之后分割原理历史上最重要的发展．这本书在任何文字的书籍中都是内容最丰富的经典之作． 【49】

	三角形	正方形	五边形	六边形	七边形	八边形	九边形	十边形	十二边形	希腊十字架	拉丁十字架	马尔他十字架	纳粹党徽	五角星
正方形	4													
五边形	6	6												
六边形	5	5	7											
七边形	9	9	11	11										
八边形	8	5	9	9	13									
九边形	9	12		14										
十边形	8	8	10	9	13	12								
十二边形	8	6		6										
希腊十字架	5	4	7	7	12	9		10	6					
拉丁十字架	5	5	8	6	12	8		10	7	7				
马尔他十字架		7		14						9				
纳粹党徽		6		12						8		9		
五角星	9	8		10				6						
六角星	5	5	8	6	11	9		9	9	8	9			

图 21　较新的几何图形分割纪录

① *Geometric Dissections*

图 21 是前文中相同图表（图 16)的改进版，是林格伦先生在 1968 年增订的. 图中添加了正九边形和正十边形. 表中所列的分割法都可以在他的书中找到详细的资料. 只有正十边形分割成正七边形的分割法是新的. 表中所列出的新纪录几乎全是林格伦先生创出的. 有趣的是，当林格伦先生在 1961 年将同样的表刊登在《数学公报》上时,拉丁十字架分割为正六边形的七次分割被排字工人误排为六次分割. 所以我在将他的表刊登在我自己的专栏文

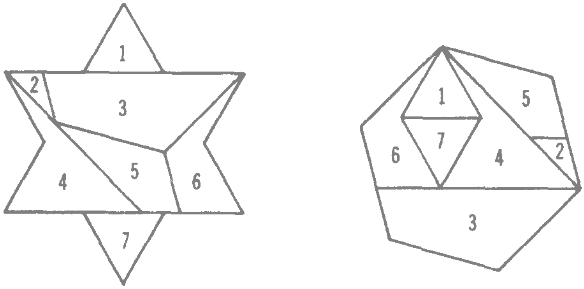


图 22　吉尔逊将六角星分割为七块再拼成一个正六边形

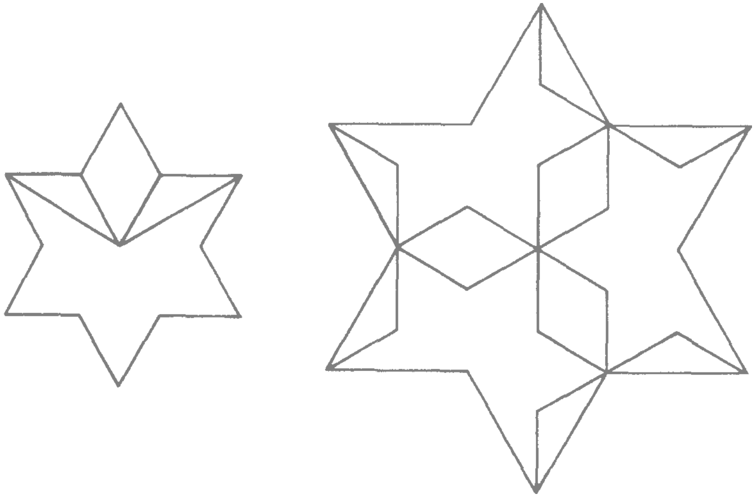


图 23　林格伦将三个小六角星分割成十二块（割法见左图）再拼成一个大的六角星

章里时就改正了这个错误.可是林格伦先生居然马上找到了六次分割的答案(见其原书 20 页),并且说排字工人并没有错【50】

图 22 是将六角星分割为七块再拼成一个正六边形.这是纽约市的吉尔逊先生①在 1961 年所提供的.林格伦先生也独立得到略有不同的答案.图 23 则是林格伦先生最近的杰作:将三个小型的六角星分割成十二块再拼成一个大型的六角星.在他的书出版时,那时的答案是十三块,这是他最新的改进.【51】

① Bruce R.Gilson.

第 5 章
漫谈赌博

玩戏法是一项令人欢愉的艺术.表演者所做到的大都违反自然界的一般规则，但是因为手法精巧且变化多端，因此带来了许多匪夷所思的惊叹.这一切都只有一个单纯的目的，那就是让观众们[52]开心.但是也有两大类的戏法，用的是魔术师的伎俩，但是目的并非如此的高尚,可以算是公开的行诈.那就是赌博和算命.不正规的洗牌法，玩牌的魔术师会用，行骗的老千也会用.将某些消息先写在一张纸条上做夹带,这是魔术师玩的"心灵魔术",也是神媒的"神算".在数学家看来，使诈的三大部门——魔术、赌博和算命——正是息息相关的三个集.

违反自然界的一般规则，包括违反数学中的概率原理在内，就是魔术师们玩魔术的关键所在.有一个相当有名的纸牌戏法，称为"宇宙之外",发明者是克瑞先生①,玩法像下面所讲的一样.请一

① Paul Curry.

位观众将一副洗好了的牌任意分发成两堆.分完之后翻过来一看，竟然一堆全是红牌，另一堆全是黑牌.这个结果大大违反了概率论所预测的结果，但是每一位观众看得都很开心.这样的戏法和赌博或算命当然是大相径庭.做这样的戏法如果只靠玩者的异常功能，就会被公认为是"超感觉"①的表演成果.反之,如果全靠发牌的伎俩,还有谁敢和他玩扑克呢？

英国有一位叫韩寿②的心理学家,他在1966年出版了一本令人大开眼界的书《对超感觉的科学评估》③.这本书里完全是讨论所谓命理学家们所用的各种伎俩，以及如何从最新的心理学研究工作的成果来分析他们欺诈的新技巧及其违反概率论原理的种种原因.同样，现代赌博中的种种使诈技巧也在一本书中得到透彻的分析，这本书也从概率论的角度来评断.这就是1961年出版的由史卡尼先生写的《赌博指南大全》④,全书共713页.这本书的出版非常合天时，因为其时美国参议院正有一个委员会在调查非法赌博,最后终于立法管制.史卡尼先生便是该委员会的重要见证人(请参阅1961年9月1日的《时代》杂志).

【53】

史卡尼先生从小就对魔术，尤其是对玩纸牌的魔术有极浓厚的兴趣，他年纪轻轻的时候便已经成为全美国玩纸牌的高手之一.二三十年以前的各种魔术杂志每每提到他创制的最新戏法.近二十年来,他花了许多时间来搜集赌场老千们所使的诈术,这些诈术不但是无奇不有,而且手段都十分奸滑.

史卡尼先生除了对赌场中老千们所使的种种诈术几乎无所不知,而且对于在纸牌上和骰子上玩的各种很难的"手法",他也都相

① ESP即 extrasensory perception的缩写

② Mark Hansel.

③ *ESP: A Scientific Evaluation* (New York: Scribner's 1966).

④ *Scarne's Complete Guide to Gambling*, Simon and Schuster 1961.

当熟稔.除此之外，他对最基本的概率理论也有深厚的基础.概率论这一支枝叶繁茂的数学分枝实际上也是由赌博问题开始的.史卡尼在他的书中就重叙了伽里略①是如何对概率开始产生兴趣的轶事 有一位意大利的贵族问伽里略,掷三个骰子时为什么三个数加起来等于 10 的时候总比等于 9 的时候多？结果伽里略回答时竟然把三个骰子掷出来后可能有的 216 种组合全列出来.史卡尼也重叙了大家比较熟悉的故事：在 1654 年有一位谢瓦利先生②问帕斯卡先生③——前者是法国宫廷中的大官也是位作家，而且自以为是精明的职业赌徒，其实并不如此；后者是法国的大科学家——前者说在掷两个骰子时他以一比一打赌：每掷 24 次总会有一次两个骰子都是六点，但是这种赌法他总是输，所以想问出道理.帕斯卡就说 如果只掷 24 次则输面较大，不过掷 25 次的话则赢面较大.(各位如果对帕斯卡的证明有兴趣,可以参阅 1959 年春季出版的《科罗拉多学院研究报告》,其中有一篇论文‘帕斯卡与概率理论的诞生”,作者是奥尔先生④.)

史卡尼又讲了一个有趣的故事,讲的是纽约的一位赌徒,绰号叫‘杀猪胖子”.有一次他和别人打赌，说他掷两个骰子每 21 回至少有一次是两个六点.可是他总是输,一直输了 45 000 元之多.由于两个骰子可以掷出 36 种不同的组合,而其中有一次是两个都是六点的组合,所以‘杀猪胖子’以为(帕斯卡时期也有好多赌徒有同样的看法)只要一直玩下去,18 次里面总有一个骰子是六点，而另一个骰子不是六点的次数也最多是 18 次,因此每 18 次就可能有

① Galileo.

② Antoine Chevalier de Méré.

③ Blaise Pascal.

④ Oystein Ore,“Pascal and the Invention of Probability Theory”, *The Colorado College Studies*, No.3, Spring 1959.

一次是两个六点.既然赌18次输赢的机会相等，那么为什么赌21次还会输呢？【54】

史卡尼的书里花了很多的篇幅详尽地分析了“二十一点”.在赌场里，有一段时间只有赌二十一点时玩家的胜算才比庄家大.史卡尼详尽地介绍了一种有效的方法可以稳赢庄家.不过读者先要花点时间贯通这种游戏里所牵涉到的数学，也要清楚地了解赌场里的行规,最后还要能‘看全副牌’(那就是要能记住每一张发过的牌和翻开的牌).还有一件事:“二十一点”的发牌人如果是用左手，那他的赢面会大些.你知道这是为什么吗？这是因为每一张牌牌面上的点子并不对称，所以左手发牌的人要在发牌前偷看最上面一张牌的点数比较不容易被人发现.书中还有一部分完全地介绍了至今都没有被公布的所谓“节奏法”1940年间，赌场里的吃角子老虎机被这个方法骗去了好几百万！直到后来做机器的厂家弄清楚其原由并且在每架机器上加上‘反震器’才没有再被骗下去.

这本书对其他的赌博都有不但详尽而且相当地道的分析，诸如宾果、扑克、金拉米①、猜数字、掷骰子甚至赌马等等.书中有一章专门讨论曾在纽约的布利客（Bleeck）大餐馆流行多时的对猜戏.这家餐馆的正式名称是‘艺术家和作家的饭店’”,很多人来此消磨时间.书中也讨论了一些花会中的赌博，包括不久前相当有名的一宗掷弹珠的骗局.我相信每个人都在这种场合中玩过丢球打瓶子的游戏.六个瓶子排成一个金字塔，球丢过去不但要打中而且要把所有的瓶子打倒.这个游戏的‘窍门’真是再简单不过.原来六个瓶子中有三个瓶子很重，三个瓶子很轻.重的摆在上面的话，只要打中其中一个,六个瓶子全都倒下.如果三个重的摆在下面,即使是职业棒球队的投手也不一定能把六个瓶子都打倒.花会中摆这种摊子的都被称之为‘双面人’,因为他可以凭自己高不高兴来决

① gin rummy

定玩的人能不能赢.

我认为书中最精彩的部分是讨论轮盘赌的那一章.赌场中当然要算轮盘赌最富丽堂皇.“它之所以令人迷醉,”史卡尼以华丽的文笔写道,“当然是因为赌台的精致、颜色鲜丽而起.漂亮的桃花心木赌桌铺上一层翠绿的呢绒，点缀些金黄色、红色及黑色的条纹.[5]数目字格子之间镀铬的金属条,亮晶晶的转轮,转起来时在灯光下熠熠生辉.五颜六色的筹码一堆一堆地摆好，等着管台子的人来分派到不同划定下注的地方.女士们大都身穿夜礼服，男士们衣着整齐庄肃，工作人员也都彬彬有礼——这都使周遭的气氛十分诱人.”

成千上万的赌徒被引诱，自己知道的概率论知识又不多，所以每年都有许多人摇身变成史卡尼所谓的“轮盘沦落人”.他们相信自己的方法,以为可以大捞一笔,终至倾家荡产、一无所存.大家都知道轮盘赌的轮边有从 1 到 36 的各数,再加上 0 和 00(欧洲和南美洲的轮盘只有一个 0).这些数并不是随机排列的.其排列之精妙就可以使各种下注法都能相当平衡.不论是赌高赌低，赌单赌双,赌红赌黑等等,机会都是均等的.庄家付给赢家的筹码是三十五比一.如果没有 0 和 00 这两个数,这种赔法倒是公平的.加上这两个数之后,赌场就有 $5\frac{5}{19}\%$ 的优势,就是说每下五元的注,赌场就会收进两毛六.但是有一种赌法除外，这就是所谓的“五数同线赌”,那就是把筹码放在分隔 1, 2, 3, 0 及 00 五个数的共同线上,如图 24 所示.换句话说，只要这五个数有一个摇出来庄家就要赔六比一.所以赌场所占的优势约为 7 [illegible]/19 ,每五块钱赌注赌场净入三毛九.显然各位不要这样赌.

“任何一个所谓的‘必赢之道’都不值一文,”史卡尼说,“因为不论你如何在桌面上下注，赌场赢的概率总是大一点.”“有时候你下注的方法能赢的概率比正常的赌法还低,”他继续写道,“你用的

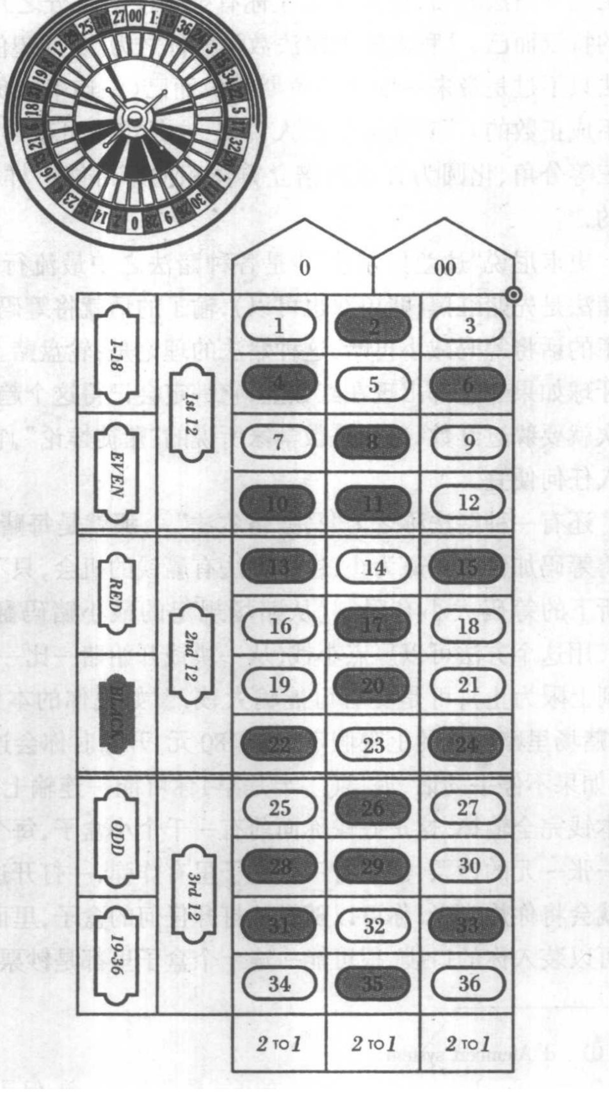


图 24　轮盘赌的轮盘和桌面的布置，黑格上有阴影，白色是红格

方法是赢的概率小于正常值的方法，而且在安排好的赌局中你一向是这种赌法的话，这只不过让你有把赌注的百分之几奉送给赌场的特权而已. 这种老输的赌法数学家称之为'负期望值'. 用你的方法只不过是带来一串串的负期望值而已（一连串的负数是永远加不成正数的）.'对懂数学的人说来,这是牢不可破的真理. 正好像三等分角、化圆为方及两倍立方体积的不可能一样，是不容置疑的.

[56] 史卡尼说"达兰贝尔法'①是各种赌法之中最流行的一种. 它的赌法是先赌红黑(赌单双也可以),输了的话就将筹码加大再赌；赢了的话将筹码减小再赌. 这种赌法的理论是：轮盘赌上的那粒小象牙球如果一连都出现在红数上,它一定会记得这个趋势,所以下一次就要躲过红数. 这正是数学家所说的'赌徒悖论",它不会给赌的人任何便宜.

还有一种赌法称之为"马亭格尔法'②,那就是每赌一次之后，便将筹码加倍直到赢为止. 这个方法有赢钱的机会,只不过赌场里对所下的筹码大小有限制（从赌场规定的最小赌码翻到七番为止）. 用这个方法可以赢点小钱(从一块钱开始赌一比一,每次加倍直到上限为止),可是更有可能输大钱. 譬如说你的本钱一共 180 元,赌场里赌颜色的上限假定也是 180 元. 开始时你会连赢一串小钱. 如果不停手的话,迟早(多半是早)你可能一连输七八次,将你的本钱完全输掉. 这正好像你面前有一千个小盒子，每个盒子里都有一张一元的钞票,但是有一个盒子里有炸弹,一打开这个盒子炸弹就会将你炸光光. 你可以随机地打开任何的盒子，里面的东西全部可以装入你的口袋. 很可能一连十个盒子里都是钞票，口袋里就

① d'Alembert system.

② martingale system.(martingale 的正式数学名词是鞅. 但是有鉴于赌徒中精通概率以致知道鞅为何物者可能不多，故用音译. —— 译注)

多了十块钱,这难道不是对你有利吗?赢小钱的概率虽然很高,但是不要忘了还有一个概率,虽不高,可是那就是一出来就让你完蛋的炸弹.很多人认为这正是负期望值的一种.

“马亭格尔法”也有反过来玩的,美国人称之为“不动血本”(欧洲国家则有另外的名词,paroli).那就是输了之后仍然赌一块钱,一赢就加倍.相比之下,这种赌法与冒着大输的危险先求小赢,似乎是先小输,一直等到大鱼上钩一次赢足合算.其实即使赌场没有下注的上限,这种赌法也是“期望值为负”.如果赌注再有限制则更【58】差.假定你从一块钱开始,即使连赢七次,加过倍的赌注也不可能超过 128 元.

还有一种常用的赌法称之为“抵消法”①.许多赌徒当它是必赢之道,最后的结果却是输得精光.一开始是赌一比一(赌红或赌黑).每输一次就依照下述的方法加筹码:赌之前先在一张小纸条上写十个连续的数,例如是 1 到 10.第一次下的注是头尾两数之和,即 11.如果赢了的话,将 1 和 10 两数划掉,再用新的头尾两数之和下注.现在是 2 和 9,和也是 11.如果第一次输了,就将 11 写在这一串数字下面,即写在 10 的后面,然后将首尾两数相加.这个方法就是每赢一次就将当时数目表上的首尾两数划掉,每输一次就在表后面加上一个数.既然赌的是一比一,而且输赢的概率又是一半对一半,所以很可能所有的数都会被划掉.如果到这一步,你已经赢了 55 元!

“看上去没有错,”史卡尼评说道,“其实这还是‘马亭格尔法’不值一文的变体而已.这些人总是冒着越输越多的危险去赢一些小钱,只不过这样的玩法每次的赌注都不大,可以玩得久些才会达到赌场下注的限制而已.赌场仍然占 $5\frac{5}{19}\%$ 的优势,慢慢地吃掉

① cancellation system.

你的钱.而且管台子的人对你所下的小赌注会感到不耐烦."

史卡尼的书里有一个极好的赌场趣闻（书中所写的趣闻很多),说是在休斯敦某一赌场中有一个醉鬼声称他'在自己心里'赌二十六点时赌输了.虽然他的赌注并没有放在赌台上，但是既然心里下了注，所以一定要在他离开赌台之前拿十块钱给管台子的人.不久之后，他又醉熏熏、摇摇晃晃地盯着轮子上的小球.小球停下之后便大叫'我赢了".他如此地大吼大叫，赌场经理不得不过来排解纠纷.最后的裁定是既然管台子的人收下了他输的十块钱，这一次就应该给他赢的钱.这位醉鬼仁兄突然间就醒了，带走了三百五十元'.各位不要再试这个花招了,'史卡尼说"因为赌场中的员工全都知道这个把戏."

[59] 1959 年古巴出版的一份杂志《波希米亚》①月刊登载的有关最近的一桩所谓"必胜之道"的文章引起了不小的骚动.这个"必胜之道"在南美洲流行了好几个月，所根据的事实是每一个轮盘赌的赌台上的第三行有八个红数字但只有四个黑数字（见图 24)——发明这个"必胜之道"的人认为这是赌桌设计的致命伤所在.

以下是史卡尼对这个方法的描述：

> "赌轮每转一次要下两个赌注.放一块钱在'赌黑'格里，这是输赢各半的赌注.然后在第三行的每一格里也放一块钱，即在这一行的八个红数 3, 9, 12, 18, 21, 27, 30 和 36 上面放一块钱,在四个黑数 6, 15, 24, 33 上也放一块钱.这一行庄家是赔二比一
>
> "数字共有 36 个，另外再加上 0 和 00.假如你赌 38 次,每次赌 2 元,一共赌 76 元.将会发生以下的结果：
>
> "1. 38 次中 0 和 00 会出现 2 次,每次你输 2 元——一共

① *Bohemia*

输 4 元.

“2. 38 次中红数会出现 18 次.每次只要第一行和第二行的 10 个红数出现一个你便输 2 元,共输 20 元.但是第三行的 8 个红数出来一个你便赢 2 元，一共赢 16 元.所以赌红只净输 4 元.

“3. 38 次中黑数也会出现 18 次.若第一行和第二行的 14 个黑数出来一个你便输 1 元，一共输 14 元.但是因为你同时又赌黑，所以黑数出来你便赢 1 元.这样便将可能输的 14 元抵消了.可是若第三行的 4 个黑数出来一个，你就会赢 3 元(每个数,即 6,15,24 和 33 上面赢 2 元，同时赌黑上又赢 1 元).故而出黑数共可赢 12 元.

“总结下来,0 和 00 上输 4 元，红数上输 4 元，黑数上赢 12 元，一共赢 4 元.将 4 用 78 除等于 $5\frac{5}{19}$% .就是说不但你能克服庄家在 0 和 00 上的胜算百分比，反而将它变成你的胜算百分比.”

读者们不妨根据你所知道的概率基本理论来找出上面这个悖论的关键在哪里.[60]

最后按照本栏的传统，让我们来玩一个以密码带来的圣诞节贺词.读者们请仔细看看图 25.图中有字母排成四行.它们可以各自上下移动，直到两个窗口中出现的两个词拼成一句圣诞贺词.这个小玩意是伦敦的美塞尔先生①提供的.

增注

自从史卡尼出版了他的《史卡尼赌博指南大全》之后，1962 年

① Leigh Mercer.

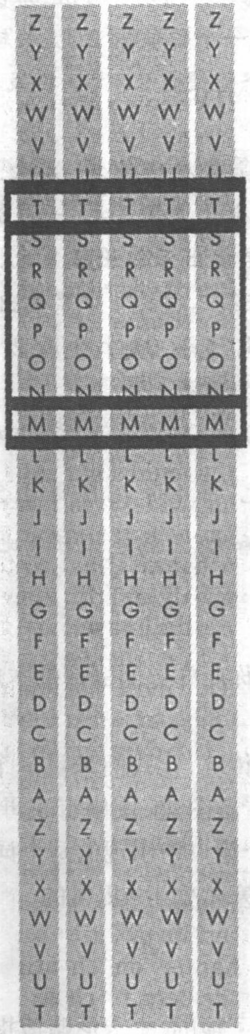


图 25　找出圣诞节的贺词

有一位索尔普先生①又出版了一部名为《让我们赢庄家》②的书.书中非常吸引人地详述玩二十一点的必胜之道，同时也介绍了作者自己在雷诺和拉斯维加斯各赌场中的亲身经历.此书出版之后,赌场老板们为之大吃一惊，他们立即将赌场里当时所用的条例略加修改以便亡羊补牢，堵住索尔普先生指出的漏洞（详情载 1964 年 4 月 3 日纽约时报第二版）.

初进赌场的新手都相信一项甚为流行的神话，那就是说内华达州各赌场的发牌人从来不用欺诈.因为他们相信即使正正规规地赌,赌场也总是赢的.而且一旦欺诈被人发觉,赌客们一定会避之若蛇蝎.因为有这个神话流传，赌客们就相信内华达州的赌场最干净.他们应该将索尔普所写的第 7 章,即讨论欺诈的一章读读.实际上即使在最好的赌场里,欺诈也是一直有的.不诚实的发牌人并不是欺诈顾客而是欺诈老板，并将欺诈所得与同伙的人分赃.为了在结账时看上去没有毛病，不诚实的发牌人便将赢顾客的次数稍稍减少.同时赌场的老板也总是怀疑有些员工会吃里扒外,故而发牌人有时就避免让赌场输得太大而引起老板怀疑自己把钱分给同伙.技术好的发牌人常以自己的高明而骄傲，有时甚至为了练他的功夫而略施小计并引以为乐.索普尔的书中说得很清楚,如果一场比赛赌注太高,老板也会叫发牌人玩点手法.赌场里也专门有视察小组，但是这种欺诈的行为仍然时有所闻，不过很少见报就是了.1964 年 4 月 12 日的纽约时报说拉斯维加斯的一间大赌场关了门,因为在一次例行检查中发现所用的骰子有几个不正常,有几条边被磨过,所以出来的点数对下注的人不利.前一年有一个二十一点的发牌人被便衣队查出有欺诈行为而被开除.1967 年 10 月 17 日的纽约时报又报导说一家大赌场被关掉，因为掷骰子的人被查【62】

① Edward O. Thorp.

② *Beat the Dealer*.

出来换骰子（他穿了一条双层围裙），用的假骰子上面有几个点数根本没有。一个月之后，另一家赌场也因为同样的理由被关掉。1961年,我在我所主持的《数学游戏》专栏——载于《科学美国人》月刊——中为史卡尼先生的书写书评，这时候也有两家赌场因欺诈行为而被关掉。

格拉斯哥的奥比尔尼先生①告诉我一个有关轮盘赌赌台设计的悖论,引起了我的兴趣。同时他也说这是波兰大数学家史坦因豪斯先生②告诉他的。这个悖论说台面上红数和黑数一样多，大数和小数一样多，单数和双数也一样多，所以单赌这两类数中的任何一类其胜负的机会应该一样。赌场占点小便宜只是因为有0和00两数而已，不然的话那只小球停在单数上、大数上或红数上的机会应该相等。假如你同时赌两类数，例如单一红或小一黑，不论你怎样配法，这种双赌的胜负机会也应该相等。三赌譬如赌小一红一单是不能赌的。假定可以赌三赌，庄家只有在所出的点子正好是小又是红而且是单才赔钱，其他任何点子都是你输。那么赌小一红一双的话，胜负的几率是不是和上面的三赌法相同？令人想不到的是这两种三赌法的胜负概率竟不相同！只要仔细看看台面的设计就知道了。又小又红又双的数有五个，但是又小又红又单的数只有四个。所以在八种不同的可能组合之中，有一种组合的概率是 $\frac{4}{38}$，另个是 $\frac{5}{38}$。

答案

前文中曾经请读者找出在南美洲流行之悖论的关键所在。其实《史卡尼赌博指南大全》已经有了下面的叙述：

① Thomas H. O' Beirne

② Hugo Steinhaus.

“关键是在下面这个论证——当第三行里的 8 个数中任何一个数摇出来你都可以赢 2 元——这句话不完全.你固然可以赢 16 元,但由于你是赌黑,所以同时又输掉 8 元,所以只净赢 8 元而已.[63]前面又说道第一行及第二行的红数出来你会输 20 元,所以红数出来一共要输 12 元而不是只输 4 元.红数输 12 元,黑数赢 12 元,0 和 00 又输 4 元,因此赌场仍然有 $5\frac{5}{19}$ %的胜算!赢的是赌场而不是你!”

纽约的一位读者叫斯涛特先生①,他写了下面这首打油诗:

若问作术竟何在?
迷信赌红能赚钱.
赌黑不赔不可能,
红点只能赢一元.
深入钻研即可见,
全红必输十二元.
惜君净赔四元整,
庄家赚定五厘钱.
盘上零点是诀窍,
请君先把数学念.

四张写有字母的纸条上下移动后可以得到“DOLLS WHEEL”(洋娃娃的轮子),可惜这不能用在圣诞节,而正确的答案是“JOLLY CHEER”(皆大欢喜).[64]

① John Stout.

第6章
四维空间的教堂

英国大诗人波普①曾经说过伦敦这个城市"让人感到亲切、逗笑而且花招百出"。这句话有谁会反对呢？就拿数学游戏来说，到了伦敦,即便包括我想象之中所做的游历在内,没有看到新玩意的经历还没有过哩。例如去年秋天，我住在离皮卡底里广场只有几个街口的旅馆里。有一天我在房间里看报时就读到下面这一段小小的广告：

> 你对三维空间的世界感到厌烦了吗？星期天请到四维空间的教堂来聚会。地点在柏拉图洞穴②。礼拜仪式在上午十一点开始。
>
> 史雷德牧师敬邀

① Alexander Pope.

② Plato's grotto.

广告里有地址，我就将广告剪下来.星期天一早我便坐地铁到了可以步行到教堂的地方.早上空气凛冽,飘着轻雾,转了最后一【65】个弯后，我完全没有想到眼前的建筑物是如此的奇特.四个巨大的立方块堆砌成一根大柱子，另外在从地面向上数的第三个大方块的地方还有四个大方块如同悬梁似地向四方延伸而出.这当然就是一个展开的超立方体①，正好像立方体的六个面可以沿着七条线切开后再展开而形成一个平面拉丁十字架一样.(中古时期的教堂常用拉丁十字架图形铺砌地面.)三维立方体有 6个(2×3)正方形的面，四维超立方体的边界是 8 个(2×4) 立方体，它们可以沿着十七个面切开，展开之后形成三维空间里的拉丁十字架.

教堂门口站着的一个年轻女人招呼我进到楼梯口.这个螺旋楼梯引到楼下的讲堂，看起来像是一个电影院，又像是一个石头的大地穴.前壁是纯白色的，粉红色发亮的钟乳石房顶洒下玫瑰色的灯光,照亮整个洞穴.四旁和大厅的后半部满布着巨大的石笋.电子风琴奏出来的音乐好像科幻电影里的配音，注满了每个角落.我轻轻地摸一下附近的石笋，感到它们像石头做的木琴键一样轻微地振动呢！

我坐下之后，新奇的音乐延续了十分钟.房顶的灯光渐渐暗下,音乐也转为轻微.同时我看到洞穴后部有一个蓝色光源，光越变越强，把与会者的身影投射在前方白墙的下部.我向后一看,看到有一个令人几乎睁不开眼的光点，似乎来自遥远的空间.

当音乐完全静下来，洞穴也完全黑暗之时，只有前端的白墙仍然十分明亮.牧师的身影在我们面前升起.他宣布要读以弗所书第 3 章第 17 和 18 两节，然后就以低沉和谐的声音开始读，声音好似来自阴影的前端，“使基督因你们的信仰住在你们心里，叫你们的爱有根有基，可以和众圣徒一同明白基督的爱是何等长阔高深.”【66】

① hypercube

厅里太暗无法做笔记.但是我想，下面这段话可以将史雷德牧师出色的布道词的重点概括无遗.

我们的宇宙——这个我们看得见,听得到,摸得着的世界,乃是四维空间这浩瀚无边之大海的‘海面’而已.这个海面是三维的.每一个世纪里只有少数的预言者对高维空间的“彼岸世界”能有直觉的感知.除了他们之外，我们只能靠类比的方式来和高维空间发生间接的关系.让我们想象平面国的存在.它乃是二维空间的影子世界.正如柏拉图的名著《理想国》①一书中第7章所描述的那些洞穴墙上的影子一样.影子是没有实质的，故而在我们度量这个平面国时，它的厚度是极小极小的，小得只不过是一粒基本粒子的直径而已.这些质点漂浮在一片液体的表面上，依照二维空间里的物理定律而移动.平面国里的居民，也是由这些质点连缀而成.他们根本无法想像除了他们所知的维度之外还有一个和这些维度垂直向上的维度.

我们住在三维空间里的人类，便可以看得到平面国里所有的质点，看得见他们家的内部，甚至每个平面国人的身体内部.我们可以不必穿透它们的空间就摸到这些质点.如果我们把一位居民从他紧锁的家中提出来，对他们来说真是一个奇迹.

史雷德牧师接着说,用类比的推理法,我们这个三维空间也是漂浮在巨大的超维海洋的平静海面上.这海洋正如爱因斯坦有一次提出的,就是一个巨大的球面.从四维空间的观点来看,我们这个世界的厚度也只不过是一个基本粒子的直径而已.我们这世界里的物理定律乃是这超维圆球上的‘表面张力’而已.这个海面是均匀不变的,所以我们的规律也均匀不变.海面的微小曲率也正就是说明了时一空的微小的曲率.在高维空间里,时间是存在的.但是假如把时间也看成空间的第四维,那么这超维世界就可以说是五维空间了.超维海洋表面上的

① *Republic*.

振动就是电磁波. 史雷德更加重语气说若不这样看就说不通为什么一无所有的空间会有能量的传送.

超维海洋的海面之外有什么呢？那就是神所住的彼岸世界. 用这个方法来看神，就知道神既无所不在于其内，又无所不包于其外. 这并不是相互矛盾的. 超维空间可以接触到三维空间中的任何一点. 上帝和我们是密不可分的. 他看得见整个世界，用不着将他的手穿透我们的空间. 但是上帝之国却整个地存在于三维空间的世界之“外”,其所在的维度我们连指都不知道该向哪里指. [67]

几十亿年以前，当上帝造我们的世界时（史雷德牧师特别停顿了一下，着重地宣称以下的讲词大都是比喻性的），他将巨量的超粒子倒在超海洋的海面上. 这些质点的截面积都不对称. 在三维空间里有些质点是右手系的，它们是中子；另一些是左手系的，它们是反中子. 中子与反中子若相撞，两者就在一闪之下化为乌有——这就是史前的大爆炸. 由于右手系的中子较多，因此爆炸的结果使部分中子存留下来，它们便一直留在三维空间之内. 绝大多数的中子分裂成质子和电子，并结合为氢. 由此,这个“单向性”的物质世界便开始进化. 质点的分布也靠这些爆炸而扩散. 上帝为了要维持宇宙不断扩张的过程，他就时时加添一点粒子，同时用手指将这些超粒子搅和搅和. 接着反中子又从相互抵销的爆炸过程中失去，而留下来的大多是中子. 所以每当我们在实验室里成功地看到反粒子的形成时，实际上就是看见方向不同的质点在转向. 正如同二维空间里用纸板做的不对称的图形可以在三维空间里翻一个面一样. 所以反粒子的产生也就是四维空间存在的说法的证明.

史雷德牧师用最近发现的骆斯提教的托玛士福音来结束他的讲词“: 若领导你们的人向你说 看哪,神的国度在天上,那么你会看到天上有飞鸟. 他们若说神的国度在海下，你会看到游鱼. 神的国度既在你的里面也在你的周遭.”

风琴的世外之音再度传来，蓝色的灯光渐渐暗去，洞穴又重新

归到黑暗，然后室顶上的钟乳石又渐渐显露.我眨了眨眼，重新回到了三维空间.

【68】史雷德牧师有高大的身材，铁灰色的头发和一笔小胡子.他站在大厅的入口处和他的教友们一一握手告别.当我们握手时,我作了自我介绍,也提起我写的专栏."久仰久仰,"他高声说道,"我有好几本你的书.假如你不急着要走的话,等一下我们找个机会谈谈."

在他和最后一位教友握完手之后，他带我走到另一个螺旋楼梯.这个楼梯和刚刚下大厅的楼梯转向相反.这个楼梯将我们带到了牧师的书房，在教堂最上面的大立方体里.房间里布置了许多模型，都是各种不同的高维超结构在三维空间里的投影模型.一面大墙壁上挂的是达利①的名画《超立方体》(Corps Hypercubus),画中一个棋盘格的平面上浮着一个由八个小立方体做成的立体十字架.另外还有和我所在的这个教堂相同的超立方体的展开模型.

"请问,牧师先生,"我说道,"你所传布的是一种新的教义还是一种历史悠久的传统教义？"

"当然不是新的,"他回答说,"不过我可以宣称以这种超信仰为基石的教义，倒是由我这一间教堂第一个开始.柏拉图本人当然并没有四维空间的几何观念，虽然他所描述的洞穴正是这个观念的类比.他的二元论的种种表现，例如存在可分为自然的存在和超自然的存在，也正是以非数学的方法来演绎高维空间这个观念.英国的柏拉图派学者摩尔②首先认为精神世界是四维的.接下来当然是康德③，他认识到我们的空间和时间只是主观的眼镜.我们正是戴着这副眼镜将"超越的真实"切成许多的横截面来看.这样一来，很容易领悟到高维空间这个观念是沟通现代科学和各种宗教

① Salvador Dali.

② Henry More.

③ Immanuel Kant.

之间所必需的桥梁.

“你用各种宗教这个词,”我问道,“那么你的教会并不一定是基督教了?”

“我的意思是说世界上各种伟大的信仰中,我们都能找到一种最基本的真理.最近几十年来,欧洲大陆的新教派神学家们终于看到了四维空间.巴尔斯①所谓的‘直向维’或‘垂直维’显然是带有【69】四维的含义,而赫姆②的神学观已经完全而明白地认明高维空间所扮演的重要角色”

“对,”我说,“最近我读了一本有趣的书,书名叫《物理学家和基督徒》,作者是波拉德③.他是橡树岗核子研究所的主任,也是英国国教牧师.书中引述了许多赫姆关于高维空间的观点.”

史雷德牧师将书名写在一张纸上“我该看看这本书.波拉德大概知道19世纪晚叶有好些新教徒写了些有关四维空间的书,诸如1888年修费尔写的《另一个世界》④,还有1893年威林克写的《视而不见的世界》⑤,此书的副标题是‘论高维空间和永生的关系”.最近出现的神秘论派或唯灵论派也都在讨论这个观念例如欧斯彭斯基⑥的书中大谈高维空间,虽然大部分的看法是根据美国的数学家兴顿⑦的思辩而来.英国也有一位卡灵顿⑧先生,在1920年用笔名史密斯⑨出版了一本与众不同的书,书名叫《再生之道》⑩.

① Karl Barth.
② Karl Heim.
③ *Physicist and Christian* by William G. Pollard.
④ *Another World* by A. T. Schofield.
⑤ *The World of the Unseen* by Arthur Willink.
⑥ Peter D. Ouspensky.
⑦ Charles Howard Hinton.
⑧ Whately Carington.
⑨ W. Whately Smith.
⑩ *A Theory of the Mechanism of Survival*.

“是指死后再生吗？”

史雷德点点头：“卡灵顿的好些话我无法同意.什么桌子倾斜乃肉眼不能见的四维空间中的杠杆所拨动的；什么超人的洞察力只不过是高维空间中的正常视觉而已等等.但是他的基本论点是可取的.我们的身体只不过是四维空间中的自我在三维空间中呈现的截面而已.每个人当然遵循生活世界中的种种常规，但是他的全部经历都会留下永存的纪录，作为信息储存在他那更高的自我身中的在四维空间的那一部分里面.当他那三维空间里的躯壳不能再工作之后，这份资料仍然存在.直到他投入到三维空间中的另一个新躯壳之后，再开始一个新生命的循环.”

“我很喜欢这个看法，”我说“有了这种看法正好说明了在今【70】世中，心灵完全依赖肉身，而且今生和永生之间也有了不会断开的沟通桥梁.美国大哲学家詹姆士①那本谈不朽的小书，不就正是谈这一点吗？”

“正是如此，但是可惜詹姆士不是数学家，所以只好用非几何学的比喻来解释.”

“另外还有些神媒说什么看见过四维空间的证明，你有什么看法呢？”我问道“不是说德国莱比锡的一位天体物理学教授写过一本如此的书吗？”

我觉得史雷德的微笑似乎有点尴尬.他说道“对了，那是可怜的左纳耳先生，他的书《超越物理》②在 1881 年被译成英文，现在连译本在这里也不多见了.左纳耳先生在光谱分析上颇有心得，可是在如何表达的技巧上毫无所知，所以被一位美国的神媒史雷德所利用.”

“史雷德先生？”我听了有点惊讶.

① William James.

② *Transcendental Physics* by Johann Karl Friedrich Zöllner.

“对,而且我有点不好意思,不得不承认他与我有点亲戚关系.他是我的曾叔祖，去世之后留下了好几大本的笔记，说明他所使用的方法.这些笔记本由他在英国的后裔取得，后来辗转地传到我的手中.”

“这使我大感兴趣,”我说“你可不可以表演一两手?”

他似乎相当高兴地接受了这个请求.他说他的爱好也正是表演一两手.而且他曾叔祖的一些戏法或许是我的数学游戏专栏的读者们所喜爱的.

他从抽屉中拿出一条长长的皮带，上面划了两条线，如图 26 所示.割了两条缝成为三条狭窄但联在一起的长条.同时他又拿出【71】一支圆珠笔叫我在这皮带的角落上写上我名字的缩写以免被掉包.我签了名,如图 26 所示.我和史雷德牧师是分坐在一张桌子的两边.他拿去皮带之后，便双手在桌下摸索了好几分钟.等到他拿出来时,皮带上的三条边全打好了结,正如图 26 的右图所示.如果是在四维空间里，打这样的结一点不难，但是在三维空间里做几乎是不可能的.

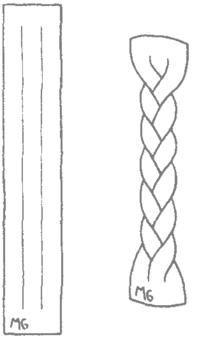


图 26 史雷德的皮带——是在高维空间中编织的吗？

史雷德牧师的第二个表演更令人惊奇.他先拿出一个平而宽的橡皮圈,如图 27 所示.让我检视之后把它摆进一个火柴盒子中，同时将火柴盒又用胶纸带密密地封好.然后史雷德牧师便把火柴盒放在桌子下面.他突然好像想起忘了先叫我在火柴盒子上做记号似的又把火柴盒拿了出来.我在火柴盒子上打了个重重的 X.

“假如你高兴的话,”他说“你可以拿着火柴盒子放到桌子下面.”

我照着他的话做了之后，史雷德便伸出了手从桌子的另一端拿住火柴盒.这时，只听见什么东西移动的声音,同时感到火柴盒轻轻地抖动.

史雷德放手之后对我说“:请你打开盒子.

打开之前，我先仔细地看看盒子.胶带原封未动，我做的记号也在.然后我撕开胶带把盒子打开，哪知道这条橡皮圈竟然自己打了个结,如图 27 的右图所示.

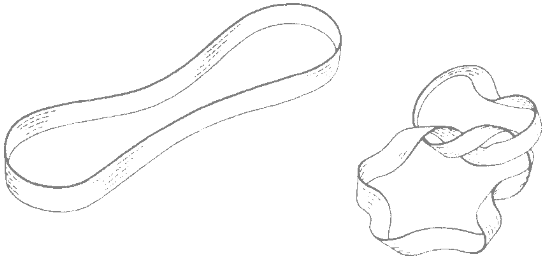


图 27 史雷德的橡皮圈——是在高维空间中打结的吗？

“就算是你用什么办法打开了火柴盒去转变橡皮圈，”我说，“天知道怎么可能让橡皮圈打上这样的结呀！”

史雷德笑笑“;我的曾叔祖有点本事吧 ?”

【72】不论我如何请求，史雷德都不肯告诉我这两个游戏的诀窍.只好请各位在翻读本章的答案前花点脑筋来想想.

我们又谈了好一阵.当我最后离开这座四维空间的教堂时，街上飘满了浓浓的雾.我似乎又回到了柏拉图的洞穴.走来走去的车辆像影子似的移动.车前亮着一股椭圆形的灯圈.这让我想起某一位波斯数学家写的诗句：

来去恍惚，恰似游动的阴影；
前程无亮,全靠天神的荫庇.

增注

这一章的第一段里我就暗示过我的伦敦之游是假想的.可是，当这篇短文登在《科学美国人》月刊之后，仍然有许多读者来信问

这四维空间教堂的地址.文章中的史雷德牧师完全是虚构的，但是他那位走江湖的曾叔祖却确有其人，而且在美国神媒的历史中是最耀眼的成功者.我在另一本讨论四维空间的书中曾专辟一章介绍他(请参阅本书作者 1967 年出版的《灵巧的宇宙》①).

答案

史雷德将狭窄的长条编成一条辫子的方法，英国的童子军以及皮革手工爱好者都相当熟悉.读者也来信向我介绍以下的几本书：

1. George Russell Shaw, *Knots, Useful and Ornamental*, p.86.
2. Constantine A.Belash, *Braiding and Knotting*, p.94.
3. Clifford Pyle, *Leather Craft as a Hobby*, p.82.
4. Clifford W.Ashley, *The Ashley Book of Knots*, p.486.

J. A. H. Shepperd, "Braids Which Can Be Plaited with Their Threads Tied Together at Each End", *Proceedings of the Royal Society*, A, Vol. 265 (1962), p.229—44.

前四本书都提到打这个辫子的方法.有关这个问题完全的数学分析在后面那篇专文里.【73】

打辫子的方法有好几个.图 28 中的程序图是一位拉勃先生②寄来给我的.照着他的方法重复地做下去便可以得到交叉次数是 6 的倍数的辫子.还有另一个方法是将皮条的上部用通常的方法打一个交叉六次的辫子，于是皮条的下半部也有了一个镜像的对称辫子.用手将下半部的镜像消除就可以了.消除的方法是一手拿

① *The Ambidextrous Universe*.
② George T. Rab, Dayton, Ohio.

紧上半部,另一只手在下半部一拉就行了.比三股更多股的辫子又可以照样做.皮条若是太硬，不妨先用水泡泡就可以了.

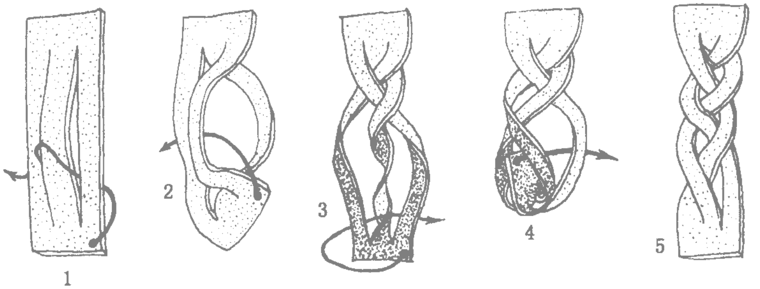


图 28 史雷德的第一个把戏

史雷德的第二个在橡皮圈上打结的戏法，事先要有准备.找一条截面是圆的橡皮圈，并且用刀将它的一小部分削平，如图 29 所示.削平的部分扭上三个半圈（见图 29 之中图）.接着再将其他部分也削平.一条圆的橡皮圈便变成一个上面有三个半圈的扁平的橡皮圈.加拿大有一位史托维尔先生①提供了另一个方法：先把已有三个半圈的橡皮圈绕在一块方木块上再急速冷冻，冻好之后【74】用锉子将它锉平,然后再沿着平面一分为二,变成两个同样大的橡皮圈，而使它们在中间是结在一起的.

现在要找另一个橡皮圈，大小和第一个一样但是没有打结.打了结的橡皮圈先放在火柴盒子里并且用胶纸封好.下一步就是要将两个火柴盒掉包.这就是史雷德牧师为什么将装有打了结的橡皮圈的火柴盒从桌子下面拿上来假装说他忘了叫我在火柴盒上做记号.这个装有打了结的橡皮圈的火柴盒可能早就用魔术师蜡黏在桌子下面.一瞬之间将第二个火柴盒黏在桌下另一块蜡上面.所以当他将那已打了结的盒子拿上来叫我做记号之前，火柴盒就已经掉了包.史雷德牧师在桌子下面拿火柴盒时我所感到的振动，可

① Mel Stover，Winnipeg，Canada

能正是他把盒子黏到桌子下面掉包时他的手指在火柴盒上滑动的声音.



图 29　史雷德的第二个把戏

切尼先生①是一位数学家也是一位魔术师. 他有一个更简单的方法做这个绕了结的橡皮圈，用的是一个空的橡皮环——店里卖给婴儿咬着磨牙用的就行——并且照图 30 的方法用刀划开. 虚线的部分也照划，所得的结果就是中间有结的橡皮圈. 假如太宽可以剪掉一部分.

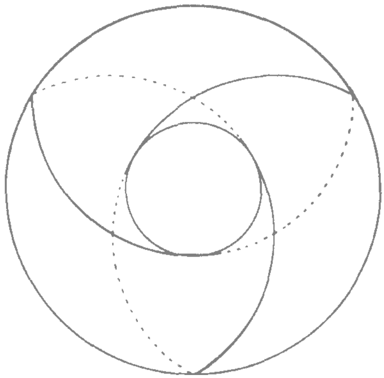


图 30　让橡皮圈打结的第二个方法

最先告诉我在橡皮圈上打结这个问题的是史托维尔先生，他是看到魔术师佛里尔②的表演才知道的. 据佛里尔先生说,他一共知道三种不同的方法.[5]

① Fitch Cheney.

② Winston Freer.

第 7 章
8 个小问题

1. 从 1 到 8

这一个有点费脑筋的八数问题之创始人是谁已无从考证.它是从我的朋友里昂斯先生①转到我手上的.问题是要将由 1 到 8 的八个数填入图 31 中的八个小圆圈里，唯一的条件是任何有直线相连的两个小圆之中不可填入相连之数.譬如说最上面的小圆中是 5 的话，4 和 6 就不可以填在下一排三个小圆中的任何一个，不然便有直线连通两个连续数的小圆.

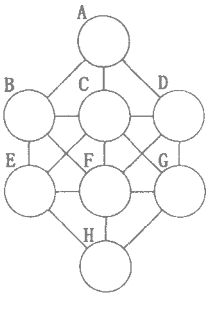


图 31　令人困扰的数字问题

【76】

这个问题有唯一的解（不把旋转或镜像反射后的情况当成不同的解），但如果不依靠逻辑推理，找出这组

① L. Vosburgh Lyons

解还是挺困难的.

2. 是美女还是猛虎？

《美女或猛虎》是斯托克顿①所写的一篇有名的短篇小说,叙述一个半开化民族的酋长如何用奇怪的方法来判案.酋长坐在竞技场一端的宝座上，他的正对面有两扇门.受审的囚犯可以打开其中的任何一扇门,全由他的运气来决定.一扇门后面是一头饥渴的猛虎，另一扇门后面则是一位妙龄美女.打开门之后，如果出来的是猛虎，那么囚犯的罪行便得到了惩罚；如果出来的是美女，那么他的无辜也会有合理的报偿，因为酋长会当场为他们主持婚礼.

酋长发现自己的女儿和某一朝臣有暧昧关系，便要来审判这个不幸的年轻人.公主预先知道哪一扇门后面是猛虎，哪一扇门后面是美女，并且也知道这位妙龄女郎也曾对这个年轻人挤眉弄眼.这个年轻人也知道公主心里有数.公主轻快地向右边做了一个信号，这个年轻人便打开了右边的门.这个故事便用下面这个问题作为结尾"：门后面出来的是美女还是猛虎？"

这件公案我做了相当深入的调查，所以可以对接下来发生的事件作如下的第一手报导.原来这两扇门有铰链相连，所以两扇门可以同时打开.这个年轻人打开右边的门之后左边的门同时也开了，而这位聪明的年轻人马上躲入两扇门和墙壁所形成的三角形中.这时猛虎从门后出来进入另一扇门而将那妙龄美女吃掉了.

酋长当然有点不高兴，但是他自诩为公道的酋长，便决定再审这位年轻人.为了不让他有取巧的机会，酋长把竞技场重新修造.现在一共有三组双开门：第一组双开门后面有两只猛虎；第二组双开门后面是一头猛虎和一位美女；第三组双开门后面是一对妙龄美女,不但长得一样,就连装扮也完全相同.

① Frank Stockton.

这一次残酷审判的过程也略有不同.首先,这位年轻人要事先决定打开哪一组双开门，并且决定这组双开门的哪一扇选定之后便给他开门的钥匙.如果出来的是猛虎，当然审判也就到此为止.如果出来的是美女，那么两扇门便会马上自动关上，同时将这位美女以及另一位（可能是她的另一位双胞胎姐妹或是猛虎）再安置在这两个房间里.美女在哪一间，另一位在哪一间完全靠抛一枚特制的金币决定.金币的一面是美女，另一面是猛虎.这时这位年轻人必须再做选择，但是他已经完全无法知道美女在哪一间，另一位在哪一间.这一次如果不幸选到了有猛虎的那一间，当然审判也到此为止.如果出来的是美女，那扇门又自动关上，再抛一次金币来决定哪一位美女被安置在哪一间房里.这个年轻人再做一次最后的选择.如果选对了便和这美女成婚，而一切都结束了.

审判的日子到了.一切都照计划进行.这个年轻人居然两次都选到了美女.他必须要判定的是第二次出来的美女和第一次出来的美女是不是同一位.但是他无法判定，急得满头是汗.公主的脸色也苍白得像大理石一样——因为这一次她也完全无能为力.

这位年轻人最后选对了美女的概率有多大？

3. 网球比赛

甲和乙打网球，甲赢六局，乙只赢三局其中有五局是不发球的球手所赢.请问是谁先发的球？

4. 不同颜色的保龄球

一位有钱人家的地下室里装了两条保龄球道.其中一条用的是深色的保龄球瓶，另外一条用的是浅色的.这位老兄对数学有兴趣.有一天，他异想天开给自己出了一个问题：

如果将两种颜色不同的球瓶混在一起再选出十个，照惯常的方法摆成一个三角形，其中任何一个小的等边三角形的三个顶点

上的球瓶不能颜色全同.如此的摆法不知道是否可能？如果可能的话,请将它摆出来.不然就要证明其不可能性.

各位不妨用跳棋的棋子先试着摆摆看.

5. 六根火柴

威尔松教授①的原名叫威尔生（Wilson）,他是一位拓扑学专家,人很聪明,只是常常有点怪想法.在他读研究生时,他便注意到他的全名每一个字母如果大写的话，除了“O”之外,其他的每一个字母都是拓扑学里所谓的等价的字母.所以他便申请将他的姓氏改拼成现今的拼法.

最近我在吃中饭的时候看见他将六根火柴在桌上推来推去.“是不是又找到了一个新的拓扑学的谜题?”我有心地问他.

“可以这么说,”他回答道“我将这六根火柴平放在桌面上,每一根火柴不能相交，只在端点相接，看看能排出多少个拓扑学里的所谓不等价的图形.”

“那应该不太难,”我说道.

“实在比你所想象的要难些，如果火柴数目比六小，所有能排出的不等价图形我都找出来了，”他一面说一面将画在信封背后的各个图形交给我看,正如图32所示.

“五根火柴所排的图形中,似乎漏掉了一个可能性,”我说“请看第三个图形，就是那正方形外面加上一条尾巴的那一个.如果将这条尾巴画在正方形的里面，那么这个图形只要变形操作不离开平面，不论如何变形也不可能变出另一个等价图形.”

威尔松摇摇头“这是大家对所谓‘拓扑等价’最常犯的误解.如果一个图形经过延伸，只要不拉断就可以转变成另一个图形，那么拓扑学家便认为它们是等价的，专用术语是‘同胚’（homeomor-【79】

① Prof. Lucius S. Wilsun.

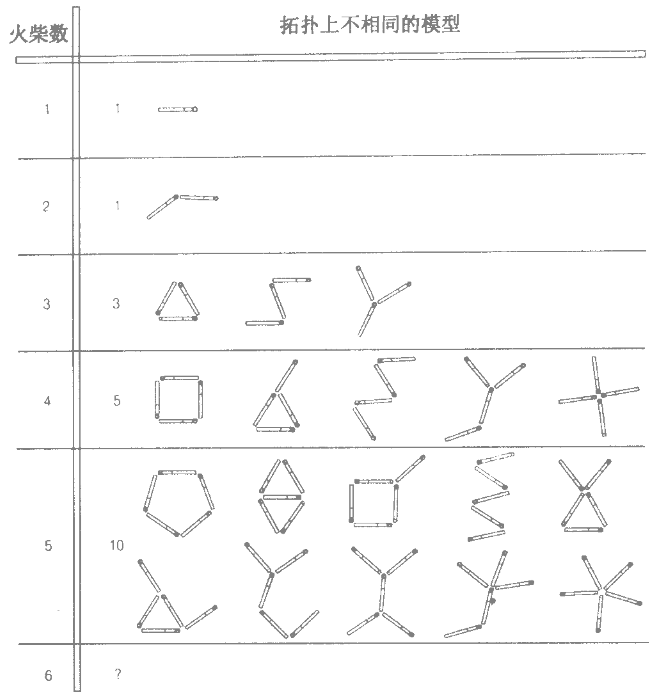


图 32 用一到六根火柴所能排出的各个拓扑上不相同的模型

phic）但是反过来说却不然，两个‘同胚’图形之一却不一定可以转变成另一个."

“请恕我无知,’我说.

“不必摆客套.两个图形所谓同胚者就是当你沿其中之一连续地随形逐点描绘时，每一点都可以在另外的图形上找到相对的一点.即两个图形上的每一点都能找到一一对应（one-to-one correspondence)关系,而且对应点也在连续移动,那么这两个图形就可称之为‘同胚’图形.举个例子来说,有一根绳子,打了一个结之后再将两端相连.这根绳子和没有打结但两端也相连的绳子是‘同胚’的.可是不论你如何延伸、拉扯也不能将一根绳子转变成另一

根.除此之外,两个圆球彼此各在其外,但在某一点处相连,即两者外切;另外两个球,大小不一样,而且小的一个在另一个的肚子里,如果也互相碰在一起,即内切的话,这在外相切的两个球和在内相切的两个球仍然是'同胚'的."【80】

我肯定是一脸茫然之情,因为他马上接着解释道"放心,让我们用另一个方法来说明,使你的读者好懂.这些火柴图形都画在纸上面.假定将它们想像成一根根橡皮筋,拿起来随心所欲地加工,包括转个弯儿在内,再放到纸上去.如果经过这一系列操作之后一个图形可以转变成另一个图形的话,这两个图形便可以称之为拓扑学上的等价图形."

"原来如此,"我说"那就是说某一个图形如果在高一维的空间内可以转变成另一个图形的话,这两个图形便是拓扑学上的等价图形!"

"就是这个意思.让我们回到那两根两头连接的绳子和两组相切的圆球上.在四维空间里,两端相接的绳子还可以打个结,打了结的也可以解开.在四维空间内,大球肚子里的小球可以跑出来又跑进去."

有了这个拓扑等价的观念,请问用六根火柴在平面上到底可以排出多少个"拓扑学上不等价"的图形?要记住,每根火柴不可折断,也都等长既不能弯又拉不长,不可重叠只可以在两端相碰.可是一旦图形拼好之后,火柴便变成橡皮筋,可以在三维空间里拿起来再变形,然后再放回到平面上.它们不是网路图(graph),其直线相碰的交点,或称为顶点,是不可更改的.这就是说三角形和五角形等图都是拓扑学上等价的同一图形,同时两根火柴连成一条线可以等价于任何长度的线.英文大写字母E,F,T,Y都是等价的;而R则和它的镜像等价;如此等等.

6. 两个国际象棋问题——最小和最大攻击力的棋阵

许多漂亮的国际象棋问题并不要求读者有下棋的功力,只不

过是用棋盘和棋子布下一些可以靠数学知识求解答的谜题．下面所讨论的两个问题便是属于这一类．

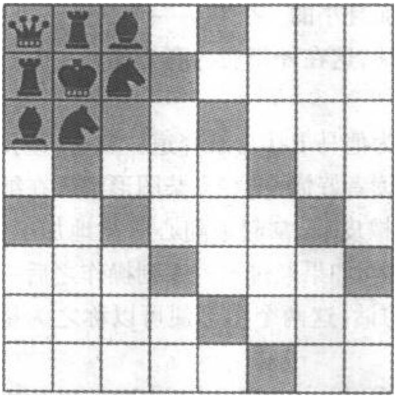


图 33　攻击力最小的棋阵

A．攻击力最小的棋阵 用同色的八个棋子(即一个王,一个后,两个象,两个马和两个车),使其攻击力为最小．每个棋子不能攻击其本身所在的棋格，但是它可以按棋规吃掉其他棋格上的棋．图 33 中所布的棋阵只能吃掉二十二个棋格上的棋(即图中的灰色棋格),但是这绝不是攻击力最小的棋阵．攻击力最小的棋阵比这个棋阵的攻击力要小得多．两个象也不一定要摆在不同颜色的棋格上（象棋棋盘的格子是黑白相间的)．

B．攻击力最大的棋阵：用同样的八枚棋子摆在棋盘上，使其攻击力为最大．同样地,每一枚棋不能攻击其本身所占的棋格,只能按棋规攻击其他棋格上的棋子；两个象也不一定要放在不同色的棋格上．在图 34 中，有五十五个棋格上的棋可以被吃掉（即图中的灰色棋格),但这个数字也绝不是最大数．

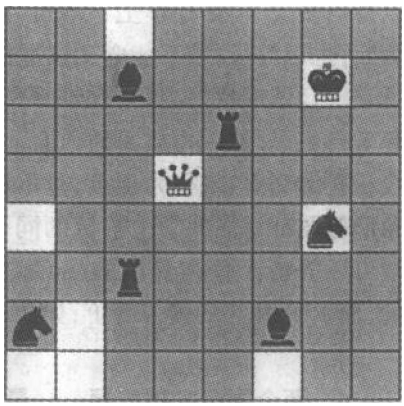


图 34　攻击力最大的棋阵

若将两个象放在同色的棋格上，攻击力最大的棋阵不但已经被发现而且也有了证明；若将象放在不同色的

棋格上，至今还没有人能证明何种棋阵的攻击力最大.象不论是放在同色或不同色的棋格上,据说攻击力最小的棋阵都是一样,可是这两种情况至今还没有得到证明.许多国际象棋高手一直在不断地研究上面那些未经证实的猜测，是否能有突破尚是未知数.若读者能提出更高明的答案必然会扬名棋坛.

7. 史密斯先生走了多少路？

某天的上午十点钟，史密斯夫妇离开他们的家，要到另一州去拜访岳父和岳母大人，并且计划途中在韦镇的一家饭店吃中饭. 【82】

想到要拜访的是岳父母，同时又想到最近生意上的挫折，所以史密斯先生心情不太好，一直闭口不言.一直到十一点，史密斯太太才敢开口问道“:我们已经走了多少路?”

史密斯看了看里程表.“只不过由此地到饭店的一半路程而已,”他简短地答道.

中午十二点他们到达了饭店，从从容容地吃了一顿午饭之后再继续上路.直到下午五点钟，离开史太太第一次问话的地点有两百英里,她又问第二个问题“:还有多少路?”

“正好是这里离饭店的一半路程.”

到达目的地时已经是傍晚七点钟.路上因为交通情况有变，车速的变化很大，不过起点到终点之间的距离却很容易算出来.(这个问题问的就是这段距离)

8. 屈指而数

去年元旦，一位数学家注意到他的小女儿以一种十分奇怪的方法用左手手指头数日子，这使他相当费解.她用拇指数 1,用食指数 2,中指数 3,无名指数 4,最后小指数 5.接着再反过来数，无名指数 6,中指数 7,食指数 8,拇指数 9.再下去食指又当作是 10,中指数 11.她就这样不停地数下去，数到 20 时正好是在无名

指上

“你到底在数什么?”她父亲问道.

她急得跺脚说道:“你看你让我忘记数到哪里了!我要一直数到 1962 年,看是停在哪一个指头上.现在我又得从头再数起了.”

数学家闭了闭眼睛想了一下,然后说:“正好会停在……上.”

这小女孩数完之后发现正好和她父亲所算出来的一样,这[83]使她觉得数学真是了不起,也决定从此要加倍努力,学好算术课.女孩的父亲怎么会算得这么快?他算出来是在哪个手指上呢?

答案

1. 从 1 到 8 八个数应该照图 35 的方式填入各个小圈圈,则没有一个数和其邻数(大 1 或小 1 的数)相接.这个答案,包括上下对调及镜像反射在内,是唯一无二的答案.

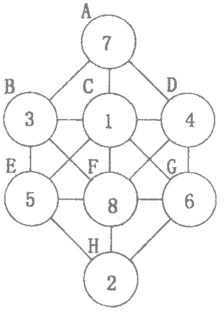


图 35 第 1 题的解答

里昂斯先生是用下面这个方法求得答案的.1 到 8 这八个数除了 1 和 8 之外,每一个数都有两个邻数.在我们所用的图形中 C 圆和其他每一个圆都相连,只和 H 圆不相连.所以假如 C 圆中写进 2,3,4,5,6,7 中的任何一数的话,那么和这数相连的两个邻数都得全写进 H 这个小圆里.这当然是不允许的.所以 C 圆中只能填入 1 或 8.F 圆的情况也是一样.再者,所用的图形是上下左右都对称的,故而 C 圆中放 1 或放 8 都没有差别:假定我们放 1 的话,2 只能放在 H 圆中.F 圆中放 8 的话,7 只能放在 A 圆中.其他四个数就很容易放在另外的四个圆中.

格拉斯哥的奥比尔尼先生①以及纽约州的可普罗维兹先生②所用的是另一种方法.他们要把原有的图先加以更改：原图中凡是没有连接的小圆都加上直线使它们连接，而原图中本来有线连接[84]的便将连接的线去掉，这样做成了一个新图.有了新图之后，原来的问题便变成：将各数放进不同的小圆，以使得能找到一条依次按1到8八个数排列的路径.从更改后的图形中可以看到，这只有四种可能性，而四种可能性也都是因旋转及镜像反射而带来的.所以答案仍然只有一个

兰德公司有一位格鲁恩贝格先生③来信说，他早在一年以前，通过迪斯尼制片厂的朋友便知道了这个问题.同时迪斯尼公司里的员工在这个问题上浪费了不少上班时间.格先生自己在美国西岸所主持的电视节目“计算器是怎样工作的？”中也引用这个问题说明人和电子计算器解答问题时所用的不同方法.人用思考而计算器则用蛮力，它先把各种可能的排列方法都找出来（共有40 320个不同的排列),然后找出正确的答案.

2. 法国的大数学家拉普拉斯④曾经分析过一个称之为“球和盅”(Ball-and-Urn)的问题(请参阅纽曼的名著《数学世界》⑤的第二卷，1332页).此处所讨论的“美女或猛虎”只不过是把同一个问题套进不同的故事里而已.这位年轻人在他第三次要选择开哪扇门的时候有$\frac{9}{10}$的可能性会选到美女.当他第一次选到美女时，这两扇门的后面是猛虎的可能性已经被淘汰.以后的选择则有下列十种：

① Thomas H. O'Beirne.

② Herb Koplowitz.

③ Fred Gruenberger of the Rand Corporation.

④ Pierre Simon de Laplace.

⑤ *The World of Mathematics* by James R. Newman.

如果门后是两位美女

甲女——甲女——甲 女 甲 女——甲女——乙女
甲女——乙女——甲 女 甲 女——乙女——乙女
乙女——甲女——甲 女 乙 女——甲女——乙女
乙女——乙女——甲 女 乙 女——乙女——乙女

如果门后是美女和猛虎

丙女——丙女——丙 女 丙 女——丙女——猛虎

[5] 以上十种不同的可能性所成的“样本空间”中,只有一个组合以猛虎结束,所以这位年轻人的幸存概率是 $\frac{9}{10}$.

3. 我在《科学美国人》月刊中所提供的解答既冗长又难懂,故而许多读者提供了既简洁又容易明白的答案.何根先生和卡南罕先生①是用代数方法而阿底斯先生和佩特先生②用的则是图解法.格雷先生③则很巧妙地利用二进制来求解.最简短的答案来自奥林先生④，他是哥伦比亚大学的经济学家.以下是他的解释：

“不论是谁最先发球,一定有五局该他先发,另一位只有四局先发球.假定先发球的球手在他先发球时赢了 x 局,其他四局中他又赢了 y 局,那么发球者一共输了 $5-x+y$ 局.这个等式等于 5(因为题中说赢的五局全是对手发球),所以 $x=y$. 因此第一个发球的球手共赢了 $2x$ 局.甲乙两人只有甲所赢的局数是偶数，故而最先发球的是甲.”

4. 十个颜色不同的保龄球瓶排成一个三角形，同时任何一个小等边三角形的顶点上的球瓶颜色不全同是不可能的.证明的方

① W. B. Hogan and Paul Carnahan.
② Peter M. Addis and Martin T. Pett.
③ Thomas B. Gray, Jr.
④ Goran Ohlin.

法很多，我们介绍下面的一种：

假定球瓶的颜色是红黑两种，而且顶点"5"上面的球瓶是红的(见图 36)."4"，"9"，"3"是一个等边三角形的三个顶点，故而其中必有一个是红球瓶.十个球瓶排出来的三角形是对称的，所以红球瓶摆在哪一个位置都无所谓.让我们摆在"3"上面.这一摆之后，"2"和"6"上面不得不摆黑球."2—6—8"又是一个等边三角形的顶点，故而"8"上面不得不摆红球瓶.那么"4"和 9"上面又不得不摆黑球瓶."10"上面不能摆黑球瓶，一摆之下"6—9—10"三个顶点全是黑球瓶；可是也不能摆红球瓶，一摆之下"3—8—10"三个顶点又是颜色相同.所以在"5"上面摆红球瓶是不对的.用同样的推理，"5"上面摆黑球【86】瓶也行不通.因此整个问题是无解的.

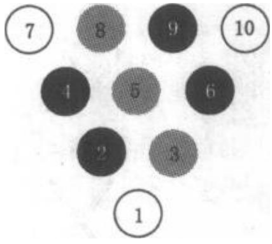


图36 第4题不能有解的证明

5．六根火柴全放在平面上，火柴彼此不相交叉同时只在端点处相碰接，一共可以摆出 19 个图，从拓扑学的观点来看，这些图形完全是不等价的.这些图形全列在图 37 中.如果没有二维空间的限制，并且可以摆成立体的图形，那就可以多加一个四面体的支架.

好几位读者（姓名见下注)①将问题推广到七根火柴，一共找到了 39 个不等价的图形.

6．图 38 是用八个同色的棋子摆出的棋阵，它只能吃掉十六个棋格上的棋子.图中皇后和角落上的象可以互换.两个象不论是[87]摆在同色的棋格上还是不同色的棋格上，所摆出的棋阵都是只能吃十六格上棋子的攻击力最小的棋阵.除此之外，这个八个棋子

---

① William G. Hoover and Victoria N. Hoover, Durham, North Carolina; Ronald Read, University of London; Henry Eckhardt, Fair Oaks, California.

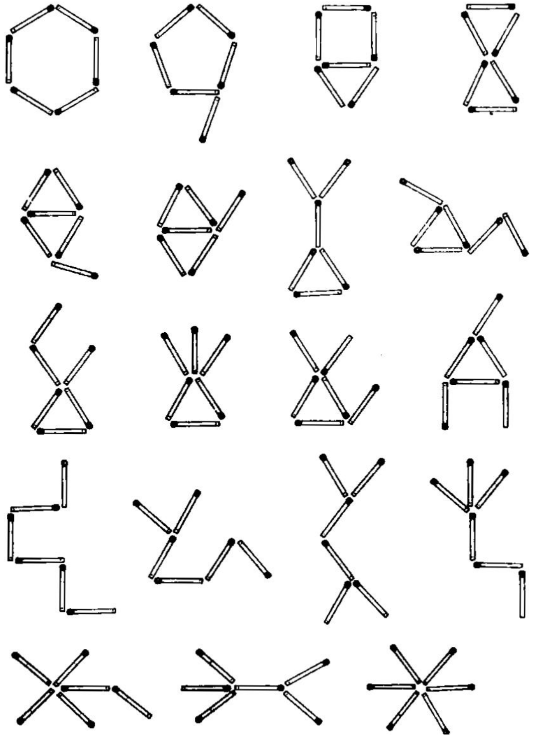


图 37　第 5 题的解答

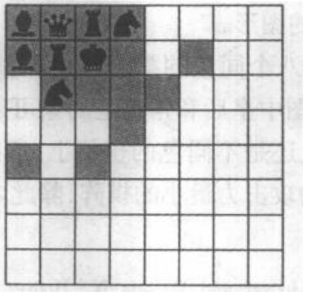


图38　最小攻击力棋阵的答案

的棋阵也解决了两个有关最小值的问题,即所需的棋步(十步)和移动最少的棋子(三个).

图39中是用八个棋子摆出的棋阵，它可以吃掉六十四个棋格上的棋子.这当然是攻击力最大的棋阵了.如果象放在不同色的棋格上,则只能攻吃六十三格.大家相信这也是攻击力最大的棋阵.如此的棋阵不止一个，但是没有人知道有多少个.图40乃是其中之一.

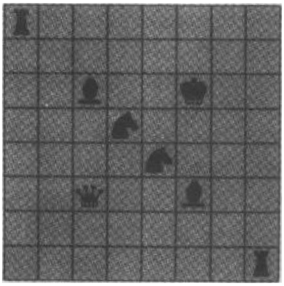


图39 象在同色棋格上最大攻击力棋阵的答案

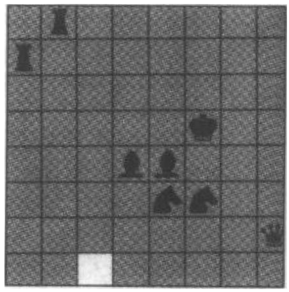


图40 象在不同色棋格上最大攻击力棋阵的答案

将象放在颜色不同的棋格上而摆出攻击力最大的棋阵早在1849年就由克林先生①提出.他更加了一个附带的条件，就是王要放在唯一不会受攻击的棋格上.读者或许会有兴趣去找这个答案.

7. 原题中所提到的时间在计算史密斯整个行程上都是无关紧要的,因为他在不同的时间车速也不相同.倒是史太太两次提出问题的时间很重要.从史密斯的答案中知道，从提第一个问题处到[88]饭店之间的距离是起点到饭店全长的三分之二，而从饭店到第二个问题提出处的距离是饭店至终点全长的三分之二.所以,两次提问题地点之间的距离（我们已知是两百英里）是全长的三分之二.

① J. Kling

所以全长是三百英里，正如图 41所示 .

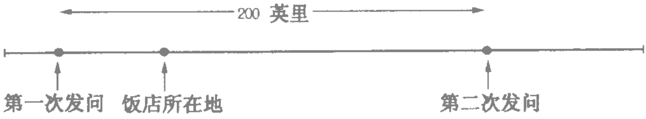


图 41　第 7题的图解

8．照这个小女孩的数法，数到 1 962 时一定停在食指上 .她的数法只不过每数八次就再重复而已（见图 42）,所以只要会用以 8 为模的同余除法便可以决定任何一数会停在哪一个手指上 . 也就是说 ,只要用 8 去除此数，其余数就可以决定此数是在哪一个手指 .1 962 被 8 除的余数是 2 ,所以停在食指上 .

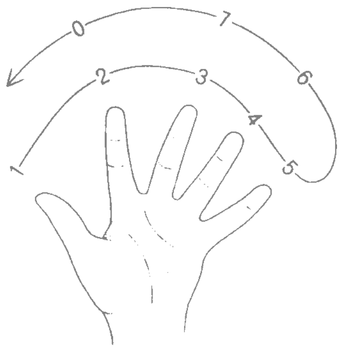


图 42　在第 8题中，各个手指所标注的数字

这位数学家只不过是用心算找到 8 除 1 962 的余数而已 .其实任何一个四位数 ,若最后三位数可以被 8 整除 ,原数也可以被 8 整除 .所以这位数学家很可能只是用心算找到 962 被 8 除的余数【89】而已！

第8章
火柴盒式的博弈机

“我对下棋几乎一无所知，不过棋盘上只剩下了那么几个棋子，显然这一局棋快下完了——[莫克松]脸色苍白得怕人,但是两眼亮得像钻石.至于他的对手我只能看到背面,但是那已经够了,我用不着去看他的脸.”

以上一段文字引自比尔斯先生写的一本关于机器人的第一流的科幻小说,书名叫《莫克松的主人》①.柯克林先生②主编的科幻小说选集《思想机器》③就将上述的小说列选在内.莫克松是一个发明家，他发明了一个会下棋的机器人.有一次莫克松赢了这个机器人，机器人竟然将它的主人勒死.

① Ambrose Bierce,“*Moxon's Master*”.

② Groff Conklin.

③ Thinking Machines.

比尔斯先生的故事反映出一种日益渐增的恐惧:会不会有一天电子计算机会完全不受操作者的控制而为所欲为?不要以为这个问题今天只有那些不了解电子计算机的人才会问.维纳先生①在去世之前便有一种预感:总有一天,政府所作的各种复杂的政策完全是靠那些能掌握对策论②的计算机所决定的.所以维纳警告说,这些计算机可能将人类推入自取灭亡的战祸中而大家还不知不觉呢!

这种无法预期的行为的最大威胁来自那些有学习能力的机器,也就是那些能靠累积的经验来增进其操作能力的计算机.它们所做的事并不遵从操作者事先制订的操作程序,而是靠它们自己“学”会的途径.长此下去很快地会达到这样的地步,那就是操作者几乎对这些计算机里有些什么样的装置线路都搞不清楚,因为这些计算机满“脑子”都是些自以为是并且是随机而变的装置.放射性元素的蜕变是完全没有一定顺序的,如果这些计算机的装置也一样无法追溯的话,那么它们的所作所为就基本上说来是完全不可预料的了(绝大多数物理学家相信会是这样).

目前牵涉到这些有学习能力之机器的研究工作,大都集中在研究那些能玩某种博弈竞技游戏并且又能一步步增进其竞技能力的计算机上.有些研究工作是机密的,因为战争也是一种博弈竞技.在这一方面最重要的成就应该算是一部 IBM704 型计算机.IBM 研究部门的一位山姆耳先生③在 1959 年为这部计算机写了一套运作程序,使它除了会玩跳棋之外,还能时时从以前玩过的各种棋局中汲取经验来改进自己的棋路.开始时山姆耳先生很容易胜过这部计算机.不过,计算机学得很快.所以虽然没有到将山姆耳勒死的地步,但最后每一局都是计算机赢.目前(三四十年前的目

① Norbert Wiener,大数学家,控制论的首创者.

② game theory.

③ Arthur L. Samuel.

前.——译注),据我所知还没有人教计算机玩国际象棋.可是有些只会下不会学的下棋机所用的运作程序已经相当地进步了.

几年前，苏联的一位国际象棋高手波特维尼克先生①曾说过有一天计算机会胜过棋王.这个评语传到了美国的国际象棋界里的一位高手拉斯克先生②的耳中.他便在1961年秋季出版的《美国国际象棋季刊》③上说道“:这当然是无稽之谈.”其实说错话的倒是拉斯克自己.计算机和人对弈时至少在三方面占优势：(1)计算机不会因为‘不仔细’而犯错误;(2)计算机分析棋局并决定下一步棋路的速度远超过人;(3)计算机因学习而得的进步几乎是没有限制的.所以很有可能一部在学下棋的计算机和专家玩过几千局之后,自己也会变成大师.除此之外，人们还可以设计一些特别的[91]下棋程序让计算机跟它自己进行无休无止的激烈比赛.它的高速处理能力能使它在短短的时间内从这些激烈比赛中所吸收到的经历远比人类所能学到的多得多.

读者如果对这种能学会博弈竞技的机器有兴趣，或许想在这方面做点实验工作的话，并不一定非要买一部电子计算机不可.他所需要的材料只不过是许多的火柴盒和一些颜色不同的小珠子而已.英国爱丁堡大学的生物学家米契先生④就发明了一套能学怎么玩“踢一踏一跺”⑤的机器,并且取名叫‘火柴盒游戏机一MENACE’⑥.详情发表在1961年企鹅出版公司所印行的《企鹅科学大观》第2卷⑦上,文章标题是‘错了再试’.他一共用了三百个火柴盒.

① Mikhail Botvinnik.

② Edward Lasker.

③ The American Chess Quarterly.

④ Donald Michie.

⑤ ticktacktoe，也称之为九宫棋.

⑥ 原文是 Matchbox Educable Naughts and Crosses Engine,缩写成 MENACE

⑦ *Penguin Science Survey*.

“火柴盒游戏机”玩起来也很简单.每一个火柴盒上有一张小图,画的是‘踢一踏一跺’游戏中各种可能出现的局势.第一步总是机器先下，所以第三步以及按序下去的各个奇数步机器才面临要作如何应付的决定.因此小图片也只要画出这些局势就够了.火柴盒里有一些颜色不同的小玻璃珠，每一种颜色代表机器要走的棋路.盒子里还有一道用纸板做了再粘上去的 V 形沟道.当火柴盒被拿起来再稍微摇一摇后，有些珠子便会被摇到 V 形沟道之中.珠子是什么颜色完全看机运.走第一步时火柴盒中每种颜色的珠子各有四粒;走第三步时,每种三粒;走第五步时,每种各两粒;而走第七步时每种颜色的珠子只有一粒.

火柴盒游戏机每一步怎样下完全由摇了火柴盒后留在沟口那粒珠子的颜色所决定.每一个刚刚下过的盒子就拿掉盒盖，盒子留在桌上直到一局下完之后再重新关起来.如果是机器赢了，那么每个盒子里就加上三粒珠子，颜色和沟口那粒珠子一样；如果是和棋，则每个开口的盒子里加一粒珠子；如果机器输了，那么每一个开口的盒子中就被取掉沟口的那粒珠子.这种赏罚制度和教小孩学习以及训练动物玩把戏所用的制度相同.这部机器玩的次数越多便能多采用赢棋的棋步或减少输棋的棋步.显然这就是一部会学着玩这种游戏的机器，而且又十分简单.只不过它不能分析已经玩过的棋局（不像山姆耳的跳棋机）而找出必【92】赢之道.

米契和火柴盒游戏机的第一场比赛一共玩了 220 局,整整玩了两天.开始时,机器败得十分惨.17 局之后，机器开始常常在角落上走第一步.机器开始下成和棋.米契先生也照样以不同的方法甚至几乎不合棋理的方法来应付机器的开局，希望机器做错误的决定.不久机器也领悟出如何来应付米契的变格，以致到后来每十局米契总要输八局之多.因此机器便成了高段棋手了.

一部机器要用三百个火柴盒，读者们未必真有人想试试来做

如此的机器.所以我设计了一种‘六兵棋’(HEXAPAWN),做起来比较简单，因为只要二十四个火柴盒.这个机器也容易分析.最好试着做一部如此的机器来玩,既可以消遣时间,同时也让这部机器有机会学习.

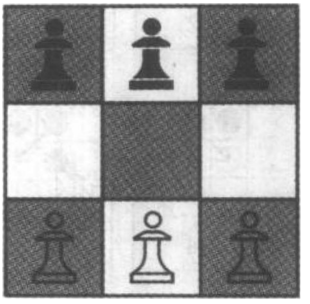


图43 六兵棋

“六兵棋’需要一张 3×3 的棋盘,还需要两组‘兵棋”,每组颜色相同的各三个,如图 43 所示.棋子也可以用不同的硬币来代替,例如十分的和五分的.只有下列的两种走法可以使用:(1)任何一个兵可以向前走一步到空白的一格;(2)任何一个兵可以向左、向右斜走将对角线上敌方的兵吃掉并且占住空出来的棋格.国际象棋中兵棋的其他走法都不能使用.一局棋走到下面的局势后便算胜局：

1. 自已的兵有一个走到第三排；
2. 吃掉所有敌方的兵；
3. 敌方无法再走下去.

敌我两方轮流走,一次只能移动一个棋子.和棋显然是不可能的.但是，是先走的胜算大还是后走的胜算大并看不出来.

女性六兵棋机器人①要用二十四个火柴盒以及足够的不同颜色的珠子来做（这些珠子也可以用小糖果来代替).每一个火柴盒盖上面有一张图,如图 44 所示.有些图上标有‘2’就表示机器走第二步时可以有两个选择，即走中间一格的兵或旁边一格的兵.图中只画出走左边一格的兵，因为走右边的兵和走左边的兵是相同的

① 原文是 Hexapawn Educable Robot,缩写为 HER,故译为女性.

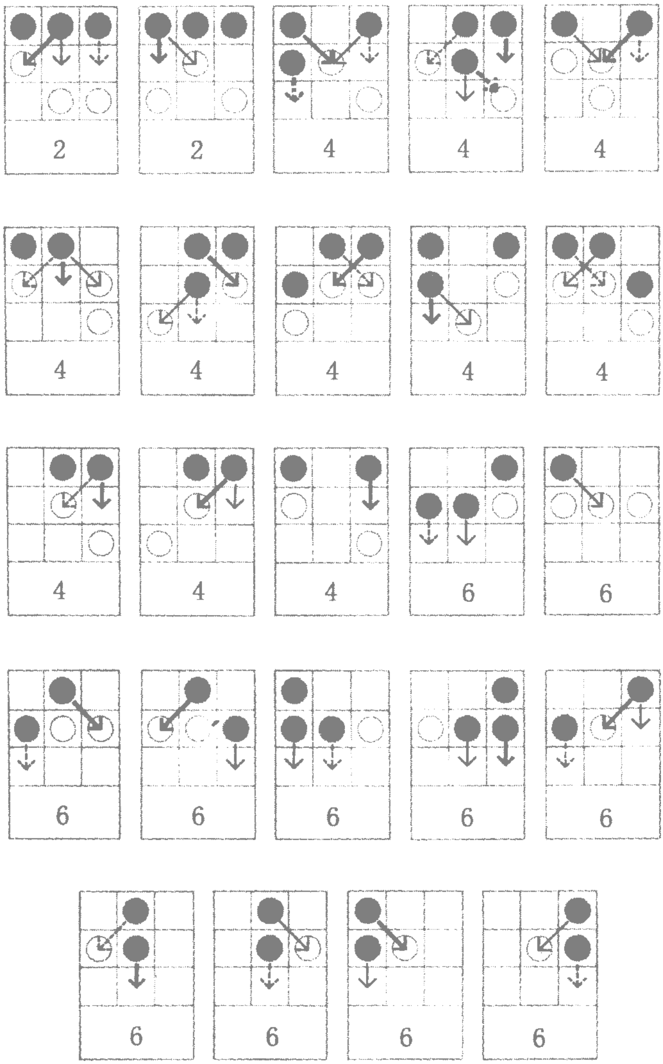


图 44　女性六兵棋机器人各个火柴盒上的标签（四种不同的箭头代表四种不同的颜色）

（只不过是镜像对称而已）. 有些图上标有‘4”,那是机器人走第四步时的十一种不同的可能性 .那些标有‘6”的图是机器人走第六步时(也是最后一步)的十一种可能性 .(图 44 的各种图形中把一些镜像对称的情况包括在内，因为我认为这样做比较容易了解 .假如不包括镜像对称在内则只要十九个火柴盒 .）

每个火柴盒中各种颜色的珠子各有一个 .珠子的颜色和图上箭头的颜色是相同的，以便配合棋子该走的棋路 .现在机器人便可以开始玩这个游戏了 .每一步可以走的棋步如图上的箭头所示，但要沿颜色相配的箭头走 .机器人每种可能的棋路都可以走,每一步都是合法的 .这个机器人并没有预定战略，因为它根本是个白痴 .

训练这个机器人的方法如下 .你先下第一步，依照当时的情况选出图面与棋局相同的火柴盒 .先把它摇一摇，闭上眼睛打开盒子任意拿出一粒珠子 .关上火柴盒，把它放在桌上，再将取出的珠子放在火柴盒上 .这时你可以睁开眼睛，看看珠子是什么颜色的，便照图上同一颜色的箭头走出一步 .接着你自己走你的棋 .机器人照上述的方法走它对应的一步 .你来我往直到终局为止 .假如是机器人赢，便把每个盒子上的珠子放回去之后再玩下一局 .如果机器人输了就要惩罚它，把最后一步走输的那个盒子中代表输棋的珠子没收 .其他盒子上的珠子一一放回去 .假如有一个盒子是空的（发生的可能性不大），那就是说机器人已经不能再走，因为它已没有不是死棋的棋路了，只好投降 .这时就把走前一步的那个火柴盒上的珠子没收 .

最初玩的 50 局谁输谁赢都要记录下来 .图 45 中的曲线正是一个 50 局的输赢纪录 .下了 36 局之后 ,机器人从此就不输了(这【94】以前它输了 11 局）.刚刚所讲的赏罚方式就是希望缩短机器人达到每次都赢的时间 .不过这段时间的长短随机器人的对手的技巧而定 .对手越强，机器人学得越快 .

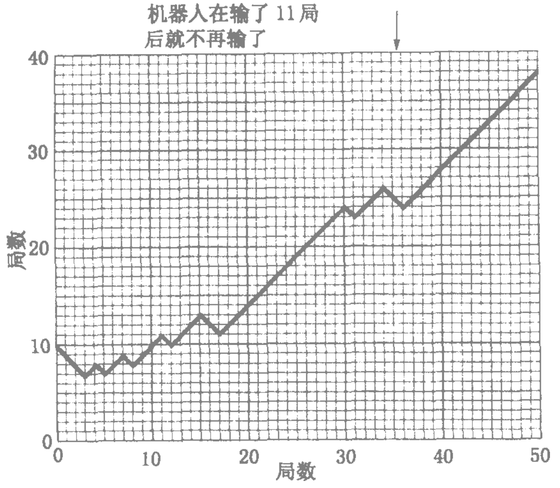


图 45　女性六兵棋机器人前 50 局的学习曲线（向下的斜线表示输局，向上的斜线表示赢局）

机器人的设计方式也可以变化. 我们可以设计一个机器人使它在一场多局的比赛中（譬如说 25 局)赢得较多的局数. 赏(或罚)的方式也可以修改. 赢一局就在每一个盒子里加上一粒颜色合适的珠子. 如此的安排下，不会那么快地消除机器人走错路的可能性，不过可以大大地减少这种可能性.

让我们来设计一个男性六兵棋机器人①，并用不同的赏罚方式. 这两部机器人开始时棋力都很低. 它们的棋力有待加强，它们既可以走第一步也可以走第二步. 我们可以安排一次男女机器人之间的对抗赛. 谁走第一步也轮流转换. 看它们俩下了五十局之后谁赢的局数较多.

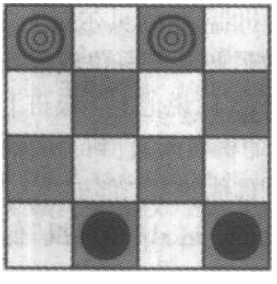
会玩其他游戏的相似机器人也很容易做. 海特先生②设计了

① 原文是 Hexapawn Instructable Matchbox ,缩写是 HIM ,故译为男性.

② Stuart C. Hight.

一部机器人，其英文名字的缩写是‘NIMBLE”①,它会用三堆筹码来玩一种名叫‘NIM’的游戏.机器人可以先走,也可以后走,赢有赏,输有罚.做一部 NIMBLE 机器人只需要十八个火柴盒.平均说来三十局之后,机器人就不会再输了.有关 NIM 这个游戏请参阅【96】作者所著的《潇洒数学小品精选第一集》②的第 15 章.

有好些用普通国际象棋棋盘玩的游戏可以在较小的棋盘上玩.这种游戏中各种复杂的变化大大地减少之后就可以用火柴盒来设计玩这些游戏的机器人.例如用 2×2 的棋盘下围棋（不过棋子要放在交点上）.图 46 中所画的是一个可以下跳棋的最小棋盘.用火柴盒做一个可以学会玩小型跳棋的机器人并不难.读者如果没有兴趣做火柴盒机器人，或许可以来享受分析这种游戏的乐趣.譬如说两位棋力相等的高手玩这个游戏时，哪位肯定能赢还是会下成和棋？



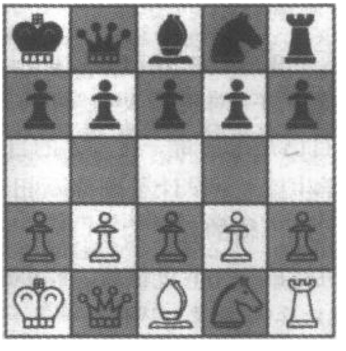


图 46　火柴盒机器人可以玩最小的跳棋(左图),但是不能玩最小的国际象棋(右图)

下国际象棋的棋盘缩小到最小但仍然可以用全部棋子，并且各种不同的棋子还可以用正常的棋步的，就是图 46 中所示的 5×5

① 原名是 Nim Box Logic Engine.

② *Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*.

棋盘.可惜即使棋盘缩小到这个尺寸，其变化的复杂性仍然无法用火柴盒做机器人来玩.事实上我发现，分析这个小棋盘上的棋局，甚至连判断哪一位棋手占先都是不可能的.例如先下的是不是一定赢等等.我愿意把这种小国际象棋推荐给计算机专家来设计一部简化的棋艺学习机，也推荐给爱下棋的人，让他们随时随地都可以下几分钟棋.

增注

承蒙很多读者试验了这些火柴盒机器人，并且将他们的经【97】验告诉我.谭勒尔先生①说他设计了一个“女性六兵棋机器人”并且在学校里举行的花会上展览.这部机器人开始学的时候只有赏没有罚，所以来和她对抗的对手们赢面较大（不过越来越小）.但是当机器人变得更厉害之后，给对手的奖金也渐渐增加.

有些读者曾设计两部彼此对玩的机器人.强贝尔斯先生②称他所设计的一对机器人为“机器人夫妇”③.还有一位威佐瓦蒂先生④,自己是芝加哥一所小学的自然课老师,说他七年级班上有一位女学生威兰⑤设计了两部互相对抗的机器人，直到其中的一部达到只赢不输的程度为止.豪斯先生⑥称他的第二部机器人为‘六兵棋机器鼠’⑦.不过他说，下了 18 局之后这只“机器鼠”低头向“女性六兵棋机器人’服输.

① L. R. Tanner.

② John Chambers.

③ 原名是 Two-way Hexapawn Educable Machine,缩写就变成 THEM.

④ Kenneth W. Wiszowaty.

⑤ Andrea Weiland.

⑥ John House.

⑦ 原名是 Relentless Auto-learning Tyrant，缩写变成 RAT.

一位山狄佛特先生①将他的两部机器人分别命名为“马克一号”(MARK—Ⅰ)和“马克二号”(MARK—Ⅱ).和以往讲的情况一样,18局之后“马克一号”就只赢不输.但是“马克二号”却学会如何拖延比赛时间到最后才输.山狄佛特先生又想出一个不可思议的比赛方式.他在当地一个高中的数学俱乐部里选出两位学生——一位男生,一位女生.这两位对六兵棋一无所知，所以比赛前他给每一个学生一张纸条说明六兵棋的玩法和规则.“这两位棋手一人在一个房间里,”山狄佛特先生说,“每下一步就将所走的棋步告诉一位裁判.这位裁判将两位棋手的棋步转告给第三个房间里的两部“六兵棋机器人”以及计分人员.这两位棋手并不知道有这种安排，都以为只不过在玩一个看不见对手的棋局而已.实际上两位都在和机器人玩，并且还轮流拿黑棋或白棋呢！可怜我们这些夹在中间的工作人员，又要操作机器人又要计分，同时每个棋手报告棋步时总有一些细节要澄清.

他们两位，一面下棋一面讲述自己的棋步，同时也分析对手的战术.以下是他们所常用的评论：

“这一步最安全,棋子不会被吃掉,所以后来一定会赢.” 【98】

“他吃了我一个,我也吃掉他一个.下一步如果如我所料，他会再吃掉我一个.再下一步我就让他不能动了.”

“我真笨!”

“我想他太不专心.从此之后他不能再犯任何错误了.”

“不错,她愈来愈棒了!”

“这一下他可真的在专心下了.竞争愈来愈厉害了.”

“太想不到了……难道他没有看见,如果再向前走我就赢了?”

“对方不错,幸好我先占了优势.”

最后两位棋手终于看到了跟他们对玩的两部机器人.山狄佛

① Peter J. Sandiford

特说他们完全没有想到对手竟然是机器！

麻省理工学院的赛特斯先生①用 FORTRAN 语言给 IBM1620 型计算机写了一套程序,来让它学如何下"八兵棋"(OCTAPAWN).就是将下六兵棋的棋盘改成 4×4，并且每一方用四个兵棋来下.第一行放四个白兵,第四行放四个黑兵.照他说，先下的人如果第一步是先动角落上的棋来开局是一定会赢的.在我截稿之时,他所用的程序还没有来得及讨论开局不动角棋的各种可能性.

有一位贡白尔格小姐②说她和自己做的火柴盒机器人对玩时比机器人学得快.大概是因为"它每输一次我就从它盒子拿出一粒糖来吃".

还有一位爱里斯先生③说他为一部计算机写了一套程序，让它学着玩"踢一踏一跺".用的方法和玩火柴盒机器人很相似.开始时计算机很笨，跟真人玩的时候根本乱走一通，所以输得很惨.后来他让机器跟机器自己对玩 2000 局(大概一共只要两三分钟),一面玩一面学，后来就很难得被真人棋手打败了.

好多国际象棋棋手因为我为俄国棋王波特维尼克的说法作辩【99】护而大不以为然.有一位大师向我保证说，波特维尼克的看法是鼓舌如簧的空话.读者不妨将波特维尼克的原文读一遍再作判断.原文刊登在苏联的《共青团真理报》④上.荷若维兹先生⑤及巴特尔先生⑥将该文合译成英文登在他们合写的《棋局精选》⑦上.译文大意如下:"总有一天,"波特维尼克说,"会玩棋的机器人会赢得国际冠

① Richard L. Sites.
② Judy Gomberg.
③ Robert A. Ellis.
④ *Komsomolskaya Pravda*, January 3, 1961.
⑤ I. A. Horowitz.
⑥ Jack Straley Battell.
⑦ *The Best in Chess*.

军……那时会举办两种冠军赛，一种是真人比赛，一种是机器人比赛.其实机器人之间的比赛并不是真的是机器人在比赛，而是为它们写程序的两个人在比赛."读者应该从上面的一段话里来理解波特维尼克的本意.

很多科幻小说以机器人下国际象棋为主题.有些是长篇小说，有些是短篇故事.(原作者所介绍的书,书名,作者,以及故事大纲这里全部未译.好些书已经不再流行而且国内的读者对这些作品或许并没有兴趣.——译注）很多人说机器人会写出一流的乐章或诗篇并画出好的图画，反对这种说法的人也理直气壮.但是这和国际象棋不一样，棋艺大师对计算机有朝一日能和他们比赛不以为然这是可以理解的.爱穆尔先生就为兰德公司写过一篇报告，分析他对所谓'有智能'机器①的看法.基本上，下国际象棋和玩"踢一踏一跺"没有什么两样,只不过象棋变化太多也太复杂.可是这正是计算机的特长所在.

拿跳棋来说，机器人拿冠军恐怕不是太久远的事.跳棋可以说是已经被研究得相当透彻了.两位冠军比赛几乎最后总是以和棋收场.因此为了使比赛更能引起人们的兴趣，现在规定前三步一定要随机而下.故而贝尔曼先生②说":十年之内,跳棋将要变成一种完全可以预测的博弈."【100】

跳棋的变化当然比不上国际象棋那么复杂.什么时候真人才能和计算机下国际象棋如今尚无人能够预测.有人说计算机就是输了,也要花很长的一段时间,重温所下过的棋步,然后才慢慢地打出"我输了"三个字来！（这当然是一句老掉了牙的刻薄话.)在1958年有几位数学家曾预测过计算机能够在十年之内拿棋王的

① Paul Armer的报告叫*Attitudes Toward Intelligent Machines*.

② Richard Bellman，请参阅*Proceedings of The National Academy of Sciences*，Vol 53、Feb. 1965.

衔头.这个预测当然是过分乐观了.彼得罗相先生①拿到棋王头衔时说过，计算机在十五到二十年之内可能有能力和真的棋王一较雌雄.这段话曾经登在 1963 年 5 月 24 日的《纽约时报》上.

六兵棋的棋盘可以加宽，不过仍然只有三排.有一位布朗先生②曾在 1965 年 11 月份的《数学杂志》③上发表了一篇专文为加宽兵棋做详细的分析,题目就叫《加宽兵棋的归纳分析》④.如果棋盘的宽度 n 是 1,4,5,7 或 8,先下的棋手一定赢.其他的宽度都是后下的棋手赢.

答案

在 4×4 的棋盘上下跳棋，两位棋手如果不出差错，一定是和棋,如图 47 所示.黑棋的开局有下列三个选择:(1)C5;(2)C6;(3)D6.

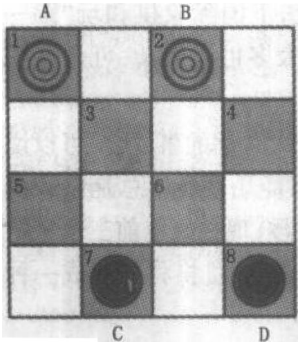


图 47　只要玩的方法对，跳棋总是和棋

黑棋如果跳 C5 那么白棋走 A3 之后黑棋就输了.黑棋若是走 C6,不论白棋如何下都是和棋.黑棋最好是走 D6,如果白棋走 A3 或 B3,都是黑棋赢.但是白棋走 B4 就变成和棋.

前文中我说过可以用火柴盒来做机器人玩 3×3 棋盘上的围棋.美国围棋协会副主席依里亚斯堡⑤说，先下子的棋手如果将白子放在棋盘的最中间,以后只要当心下子一定会赢的.

① Tigran Petrosian.
② John R. Brown.
③ *Mathematics Magazine*.
④ Extendapawn-An Inductive Analysis
⑤ Jay Eliasberg.

用 4×4 棋盘下跳棋太过简单．但是用 5×5 的棋盘，不但要费心机而且终局相当令人惊奇．有一位卡斯威尔先生①写信给我谈到这种 5×5 的小跳棋时说，好几年前就有人向他提起过．开始时三个白棋放在第一排，三个黑棋放在第五排．棋步和正规的跳棋一样，也是黑棋先下．大家都以为只要两位都当心下多半会是和棋．可是却并非如此．在这个小棋盘上因为王棋没有又能向前又能向后走的地盘，情势便大不相同．卡斯威尔发现不但是有一位棋手一定会赢，而且如果输家下得好，最后的胜局却是惊人的．这些机关我暂时不公布，好让读者们自己来分析这个问题，看看哪一家一定会赢．

【102】

① Robert L. Caswell.

第9章
谈螺线

两个农家小孩将一块木板放在一段圆滚木上做了一个跷跷板，就一上一下地玩.请问这块木板上的每一点，在一上一下的动作中会画出怎样的一条曲线？

一个有许多木马的旋转圆盘上,一个人沿着半径以不变的速度走出走进,对地面来说他画出了怎样的一条曲线？

空地上一个等边三角形的三个顶点上有三只狗，号令一下，每只狗就去追它右边的那一只，而且方向总是向着那一只.右边那只每转一个弯，追它的狗也照样转了弯再追.三只狗的速度全相等也都保持不变.一直跑到三角【103】形的中心才停.它们是循着怎样的曲线在追？

以上三个问题的答案乃是三种不同的螺线①.让我们先将这

① spiral.

三种螺线稍加分析，然后再就篇幅许可看有什么有趣的问题可以介绍.

跷跷板上每一点所画的曲线称之为圆的渐伸线①，任何一个曲线的渐伸线都可以用以下的方法画出来.把一根线钉牢在曲线上并且拉紧，然后沿着曲线将这条线渐渐缠紧.这条线上的任何一固定点所画出来的轨迹便是曲线的渐伸线.将一只羊拴在木柱上，如果这只羊绕着柱子转，并且将拴羊的绳子紧紧缠在柱子上，这样便画出了圆的渐伸线.

图 48是画螺线的另一个简洁的方法.用一块厚纸板切出一个大小合你要求的圆片，并且粘在纸上，圆纸片上再粘一片稍稍大一点的圆片.大圆片上有个小槽以便固定一根一端打了结的绳子.把绳子在小圆片上绕上几圈.绳子的另一端有一个可以让铅笔

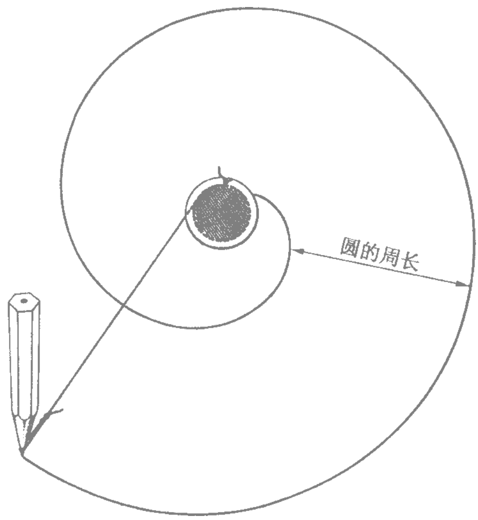


图 48　画圆的渐伸线的方法

① involutes of circle.

尖穿过的小孔.用铅笔将缠在小圆片上的绳子沿着小圆片松开，这就画出来一条圆的渐伸线.铅笔所画出来的螺线相邻两圈之间的距离，若沿着小圆的切线来度量则始终保持不变，和小圆周等长.【104】圆又称之为螺线的渐屈线.

旋转木马大圆盘上的人走出的曲线称之为阿基米德螺线①.阿基米德最先研究这种曲线,他所写的《论螺线》②主要就是讨论这种曲线.将一个用厚纸板切出的圆片放在唱机的转盘上，当转盘旋转时,用一支蜡笔沿着纸板上的某一半径以等速向外移动,画出来的便是阿基米德螺线.唱片上的细纹也就是最为常见的阿基米德螺线.用极坐标③的术语来说，任何一点的向径④(即这一点与圆心的距离)始终和它的极角⑤(即它和某一固定半径之间的转角大小)保持一定的比例.在极坐标中阿基米德螺线的方程式十分简单,改用笛卡儿坐标它的方程式便复杂得多了.

另一种可以画出比较精确的阿基米德螺线的方法如图49所示.图中的两个小圆片就是用来画圆渐伸线时所用的圆片.在这两个圆片上再钉住一条可以绕钉子旋转的长纸板条.纸板条旋转时把套在小绳一端的铅笔也同时向外移动，很容易看到，其移动的速度和纸条的旋转速度成正比.

第一圈转下来之后所得到的螺线和圆的渐伸线几乎无法分【105】辨，虽然它们是两个全不相同的曲线.阿基米德螺线每圈的距离也是相等的，但是这次的测量距离不再是沿着圆的切线方向度量，而是沿着圆的半径方向度量.阿基米德螺线和圆的渐伸线是螺线中

① spiral of Archimedes.

② *On Spirals*.

③ polar coordinate.

④ radius vector.

⑤ vector angle.

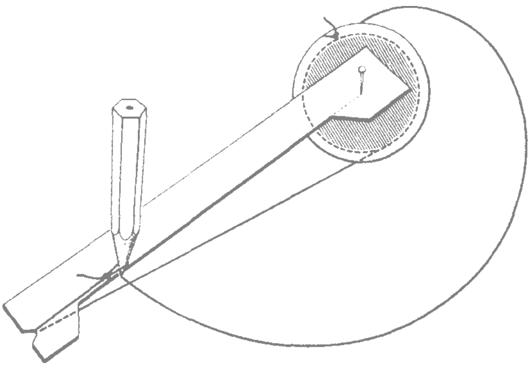


图 49　画阿基米德螺线的工具

最常见的两种.例如弹簧，卷成卷的地毯或纸卷以及一些首饰上见到的装饰花纹等等.只是这些曲线在数学上的精确度不够，不能决定它们是圆的渐伸线还是阿基米德螺线.

一旦阿基米德螺线能够精确地画出来，它便可以用来将任何一个角分成任意多个等角，包括角的三等分在内.所用的工具只限于圆规和不能度量的直尺.将这个角的顶点和螺线的极（也就是原点)重合,角的两边和螺线相交(见图 50).以 P 为圆心用圆规画一段圆弧 AB ,同时将 AC 三等分.分别过 AC 的这两个三等分点,用

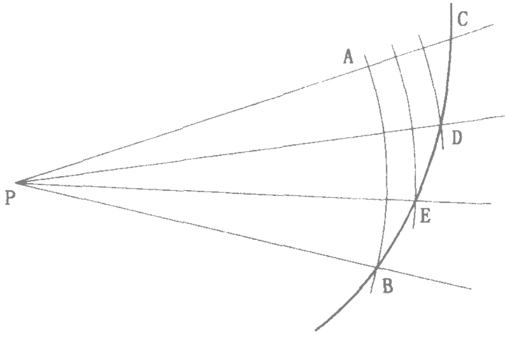


图 50　用阿基米德螺线将任意一个角三等分

圆规画两段弧，和螺线相交在 D、E 两点.PD 和 PE 两线就是原角的三等分线.读者不妨试试证明这种三等分角的正确性.

有些机器能将均匀的旋转运动改变成等速的平行运动.这些【106】机器例如缝纫机,所用的零件就如图 51 所绘.图中心形两边的曲线乃是相互成镜像的阿基米德螺线.

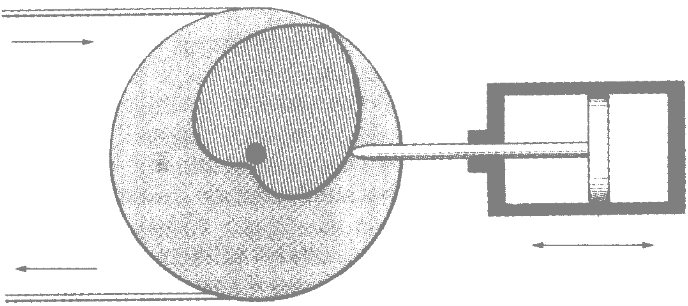


图 51　阿基米德螺线把旋转运动变成平行运动

在等边三角形顶点上的三只狗，以等速互相追逐到中心为止.它们所画出来的曲线称之为对数螺线①，也称为等角螺线②.它的定义是：这条曲线和每一个向径的交角都是相等的.如果用数学中的点来代替狗，每一个点到达中心时所经过的路程全是相等的 $\left(\text{都等于三角形边长的}\frac{2}{3}\right)$.但是在它们到达中心之前都已经绕着原点旋转了无限次！如果有两只以上的狗，每一只都由一个正多边形的顶点开始追逐，这些狗所画出来的曲线全是对数曲线.如果只有两只狗，每一只狗当然画出一条直线.反之,若有无数只狗,则它们全都沿着一个圆彼此追逐.这就粗浅地说明了等角螺线有两个极限.当它们和向径之间的角度从 0 变到 90 度时,等角螺线便

① logarithmic spiral.

② equiangular spiral

从直线变成圆.

地球表面上的对数螺线称之为等斜线或菱形线①.这条线和地球的子午线以某一固定的角度（直角除外）相交.所以如果你在向东北方向飞行时，若一直照罗盘上某一角度行驶，你就会沿着一条等斜线一直到达北极.你所遵循的路程和追逐的狗一样，到北极有一定的距离，但是也和数学上的点一样，在你到达北极之前也绕着北极飞了无限次！你的路程在与北极相切的平面上所作之球极【107】平面投影，乃是一条完美的对数螺线.

在自然界中，最常见的螺线就是对数螺线.例如鹦鹉螺贝壳上的条纹,蜗牛角上的条纹.许多植物种子的排列，例如向日葵和雏菊以及松果上的条纹等等，也都是对数螺线.有一种蜘蛛学名叫Epeira它所结的网的每一圈都是对数螺线.法布尔先生所写的《蜘蛛的一生》②就特别加了一篇附录，专门讨论等角螺线的数学性质及其在自然界中所见到的美丽的例子.这种螺线出现在动植物上以及它与黄金分割及斐波那契数列③之间的关系有许多文献可查.有些是十分怪异的.最重要的参考资料是库克先生所写的《生命的曲线》④.本书中的插图很多，早在1914年出版,可惜已经绝版多年.

做一个画对数螺线的工具很容易，如图52所示.也用纸板照图切出一个长条,图中a角的大小可以在0度和180度之间.将纸板的任一边固定在螺线的原点上.铅笔沿着斜边前后移动，整个纸板可以以顺时钟方向或反时钟方向紧靠着原点转动，铅笔便会画【108】出对数螺线一段段很短的弦，而Epeira蜘蛛所织的网也是由一段

① loxodrome，或 rhomb line.

② *The Life of the Spider* by Jean Henri Fabre.

③ Fibonacci number series.

④ *The Curves of Life* by Theodore Andrea Cook.

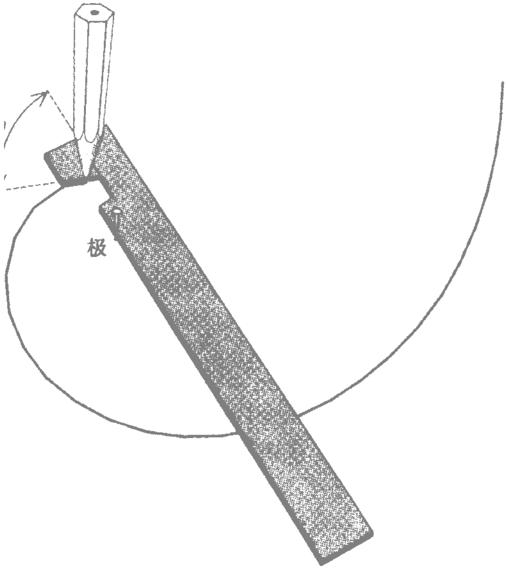


图 52 如何画对数螺线

段如此的短弦所成.斜边的弦越短，做出来的螺线也就越精确.这个工具也可以用来验证某一螺线是不是对数螺线.

a 角如果是直角会怎样？所得到的螺线便会蜕化为一个圆.假如 a 角等于 74 度 39 分(实际上所需的数值比此值稍大),则所得到的螺线和它自身的渐伸线是重合的.所有对数螺线的渐伸线全是对数螺线,只不过在 a 角等于此值时，两个对数螺线完全相同.

最早发现对数螺线的是笛卡儿①.17 世纪的瑞士数学家雅各布·贝努利②对这种螺线的特性有极大的兴趣，尤其是在不同的变换下又重新出现（例如，它就是自身的渐伸线等等).所以他留下遗

① René Descartes.

② Jakob Bernoulli.

言说要将对数螺线刻在他的墓碑上，并加上一句用拉丁文写的“千变万化,还我原貌”(Eadem mutata resurgo),可惜他的遗言没有完美地完成.首先,那句拉丁文根本给遗漏了.再者,刻墓碑的石匠因为手段不高明，刻出来的曲线又像阿基米德螺线又像圆的渐伸线.这个墓碑如今还在数学家的墓前，上面的螺线一看就知道不是对数螺线，因为圈与圈之间的距离没有越转而愈大.

若以大小而言，对数螺线最为壮观的表现就是旋转星云的星云臂.银河系本身的出现就是一个极大的神秘，而那些张牙舞爪的云臂为什么又正好是对数螺线真费人思索.这些星云臂是由大银河的旋转而产生，由一些发光的星和气体物质所组成.整个银河系是由成亿的星组成的，像一个极大的风车不停地旋转.因为我们是从旁边两个星云臂看过去的，所以地球所在的银河系看上去显得有点灰暗.根据天文学家的观察，这些银河系的中心旋转速度比外缘的旋转速度还大.根据这个观察，星云臂的旋转应该越转越紧直到没有为止才对.可是这些银河系似乎仍然无休止地转着,根本没【109】有转到看不见为止的可能.有一种理论说那是因为这个旋转的星云臂,有一边不停地吸进发光的气体物质,另一边又不停地蒸发出去,故而始终保持原来的形状.(参见1956年9月份《科学美国人.》月刊上乌尔特先生写的《银河系的进化》①.)

空间曲线中的螺旋线可以说是螺线的表兄弟，他俩的外形都是不对称的.这就是说，在一个平面上任何螺线都可以用两种不同的方法画出来，看上去完全相同，只不过彼此都是自己的镜像.如果一个螺线可以从两个相反的方向来看，例如 Epeira 蜘蛛网或银河系(假如我们可以跑到极远极远的太空之外的话),就可以看得出来它们不同的手向（左手或右手）.但是如果无法把一个螺线翻过来,或者无法远远地观察,那只好说有些螺线是顺时针方向,有

① The Evolution of Galaxies by Jan H. Oort

些是反时针方向.

“顺时针或反时针方向”这种说法有时会让人更迷糊，除非说明是从曲线的中心开始重描，看它是渐渐地向外伸张或是向内收紧.利用这个不易分辨的转手性，我们可以做一个游戏.首先请一位观众在一张纸的左边画一个螺线，由中心开始一步步向外伸张.画好之后就盖起来，然后移到纸的右边，并且由一个大圈开始请他再画一个向内收的螺线.一般人都会不知不觉地以相反的转手性来画.画完才知道两次所画的螺线的转手性都是一样的.

在一块圆形的厚纸板上以粗的黑线画一个相当紧密的螺线，然后把它放在留声机的转盘上转.这时就会出现一个常见的幻觉，它有时看上去好像在扩大，有时又在收紧，全视原来画螺线时画的是顺时针方向或反时针方向而定.还有一个更令人惊奇的心理幻觉：你用两个不同的圆纸板画两个手向不同的螺线，再放在留声机转盘上转.先转那个扩大的螺线，同时盯着这旋转的螺线看上好几分钟.然后马上转过头来看看你朋友的脸，一瞬间你朋友的脸似乎缩小了似的.换一个螺线来盯着看便会有反效果，你朋友的脸又好像在扩大似的.每一个坐火车的人都经验过类似的幻觉.坐火车朝【110】窗外看了很久，车一停，窗外的风景好像会朝反方向移动似的.有的人用眼睛肌肉疲倦来解释，但是螺线带来的幻觉却无法如此解释.很可能是眼睛带给脑子的信号让脑子糊涂了.

螺线的非对称性可以用来将一个有关通信的问题作戏剧性的描述.让我们假想有一个计划，称之为阿兹玛计划.它的目的是用无线电波和我们银河系里的X一行星联络.几十年来我们使用精巧的脉冲密码,居然能和X一行星上的航天员相互通话.X一行星上的居民的文化水平和我们差不多.但是因为该行星和金星一样是笼罩在浓浓的密云中，所以他们看不见天空，对天文学亦一无所知，他们连一颗星都没有看见过.我们传给他们一些大银河系的详细资料之后，他们的回答是：

“你说从地球上看旋臂星云 NGC5194 的两支星云臂都以顺时针方向向外延伸.请说明什么叫顺时针方向?”

换言之,X一行星上的科学家希望根据地球上的科学家所供给的资料，让他们能确定据此所画出来的 NGC5194 的形象是正确的,而不是原来星云的镜像.

这个星云是在依什么方向旋转？我们要怎样来告诉 X一行星上的居民呢？当它的一支星云臂由中心向外延伸时，我们如果说它是从左向右转，这种说法也不见得有效.因为我们完全无法得知X一行星上的居民心目中的‘左’和‘右’是不是和地球上的‘左’和“右”有相同的意义.我们一定要先给‘左’和‘右”下一个丝毫不含糊的定义才能解决这个问题.

将这个问题用更简洁的方式来表述：当我们所用的语言是用脉冲密码传送时，我们能不能就“左”这个概念和对方交流？我们怎样说都可以，也可以要求对方做不同的实验.不过有一个先决条件：彼此所能见到的非对称物体或结构没有一样是相同的.

没有以上这个先决条件，问题便不复存在.譬如说，我们可以用火箭送给 X-一行星上的居民一幅图画,画的是一个人,上面注明了“上”、“下”和“左”、“右”.这么一幅图画当然将我们心目中的【111】“左”告诉了对方.或者我们所用的无线电波可以先经过圆偏振处理再加上螺旋似的偏转，如果 X一行星上的接受天线可以侦察得出这圆偏振是顺时针方向或反时针方向，那么两方面便对“左”有共同的了解.不过这个方法违反了我们刚刚讨论过的先决条件，即两地之间没有共同的非对称物体或结构.

答案

利用阿基米德螺线可以将任何一个角作三等分，其原因很容易了解.三个圆弧与螺线的交点给每一个向径度量出一段相等的距离,即交点与 P 点之间的距离.点 P 就是想要等分的这个角的

顶点.在螺线走过时，这段距离也向外延伸并且沿着反时钟方向扫过相等的距离，故而产生了三个相等的极角.用这个方法可以将任何一个角作任意的等分，只要将 AC 这一段直线作对应的等分，CPB 角便可以分成对应的等分角.

地球上的人所谓的“顺时针方向”这个观念怎样用脉冲密码传递给 X一行星上的居民呢？我们假定 X—行星是和我们在同一个银河系，不过它被浓云覆盖，所以上面的居民看不见任何一个星.我们同时又假定，地球上和 X一行星上的科学家已经将所用的密码发展得相当完善，双方都能用它来交谈.现在的问题是怎样交换“左”、“右”两字的意义.

问题的答案是相当惊人的.直到 1965 年的 12月为止,我们一直都无法说明‘左’、‘右’的精确定义.物理学上有一则所谓的“宇称守恒定律”①，根据这个定律，所有非对称的物理程序都是可逆的.这就是说这些过程可以在本型及镜像型下进行.有些晶体,例如石英、朱砂,它们对偏振光的偏振平面只朝一个方向偏转.这种晶体的本身有两种存在的方式即左向的和右向的.非对称的立体异构物(stereoisomers)也有扭转偏振光的特性.生物体中的有机化合物有的只有单向性.但是这是地球上的进化所产生的事件.另外的行星上和地球上有相同的手向，并没有什么特别的理由.正好像 X一行星上的居民和地球上的居民的心脏都长在左边一样，没有什么特别的理由.

利用电或磁的试验也不能解决问题.一些试验是有方向性的.（例如环绕电流所产生的磁场要用右手来指明磁场的方向性）可是磁石的北极之所以称之为北，只不过是约定的习惯而已.如果我们对 X一行星的居民说明我们所称的北极所指的是哪一个方向，问题似乎可以解决.但是首先又要对‘左手’或‘右手’有共同的了解

① law of parity.

才行.用脉冲密码传递信息甚至图片传真都不难,可是在对‘左’或“右”没有达成共识之前，他们的机器所复印出的图片和原图是否相反则无法确定.

一直到 1956 年的 12 月才出现了违反“宇称守恒定律”的试验.(请参阅 1957 年 4 月份的《科学美国人》月刊,摩里逊先生所写的《宇称守恒的推翻》①一文）某些基本粒子之间有所谓的“弱相互作用’②.它们多半以某一种手向的形态存在，与约定的北极——南极无关.就我们现时所知，唯有将这种试验的详情传给 X一行星上的居民之后，才有可能说清楚左和右的定义，以及顺时针方向或反时针方向的定义，或者什么叫北极什么叫南极，以及所有涉及手向的区别.

还要加一句.假如 X一行星属于另一个银河系，问题仍然不能解决.那一个银河系可能是由反物质所组成（所谓反物质即所有的基本粒子的电荷都和正物质的电荷相反）.在如此的银河系里,“弱相互作用”的手向说不定和地球正相反.所以假如不知道这个银河系是不是由反物质所组成（这又无法靠它传送来的光的偏转而得知),那么违反‘宇称守恒定律’的试验又无法将左或右的方向性作明确的定义.

① *The Overthrow of Parity* by Philip Morrison.

② weak interactions.

第 10 章
旋转和反射镜像

一个几何图形,经过‘ 对称操作 ’之后仍然保持不变,就是一个对称的几何图形 .其所能接受的对称操作种类愈多，其对称性就愈加丰富 .例如英文字母 A ,将一面直立的镜子摆在它的旁边,镜中的映像形状不变,所以 A 有垂直对称 .英文字母 B 没有垂直对称，但是在横放的平行镜子里它的映像形状不变，所以 B 有水平对称 .英文字母 S 既没有垂直对称也没有水平对称，但是将它旋转 180 度之后形状不变，所以它有双重的旋转对称 .字母 H , I, O 和 X 这三种对称均有,尤其是 X 的对称性比 H 和 I 都丰富 ,如果它的两支‘ 手臂 ’是以 90 度交叉的话,那么每转 90 度它都是对称的,所以它有四重的旋转对称 .至于 O ,如果写成圆形,它是最富有对称性的字母 不论怎样转,不论是什么方向的反射镜像,它全是对称的.

地球是一个椭圆球，地心引力将一切物体都朝地中心拉 .居住在地球上的生物在进化的过程中，发展很强的垂直性对称而

水平性或旋转性对称则较弱.人类在制造各种用品时其对称性[114]也具有这种趋势.放眼看四下的物品,椅子、桌子、落地灯、盘碟、汽车、飞机、各种建筑物等等，垂直对称比比皆是，不可胜数.垂直对称是如此普遍，使得一张照片是否左右相反根本无可辨认，除非能够看得出显然的反常之处，例如汽车驾驶盘的位置左右颠倒，或招牌上的字是反的等等.但是一张上下颠倒的照片，一看就可以看得出来.

艺术图片也是一样.左右方向的错放,或者有没有转 180 度或 90 度是不太看得出来的.但是除非它们完全不表现什么，博物馆里的工作人员很少将它们上下颠倒，不当心倒挂或许会有.抽象的绘画有时会不经心地被颠倒.例如 1958 年 10月 5 号的《纽约时报杂志》就曾经将一幅孟德里安①的抽象画既左右反置又上下颠倒地印了出来.其实除了那些知道这些画的行家之外，其他的人全懵然不知.还有 1961 年纽约的现代艺术博物馆就把马提斯②的名画"船"(Le Bateau)上下倒挂 47 天之后才被人看出来.

垂直对称大家都习以为常，所以人们看到上下颠倒的东西都会感到不习惯，所以假如风景画片或其他物品被倒置之后，看上去有什么怪感觉则颇难描述.有些风景画艺术家鉴赏某些作品时,竟然弯下身来从两腿之间去看这些作品，以便判断所用的色彩.这种鉴赏的方法实在太不雅观.据说画中的线条如果上下颠倒，风景看上去都不自然，甚至颜色也会受到污染！梭罗先生(Thoreau)在他所写的《华尔腾——湖滨散记》的第九章就谈到如何用这个角度来看一个池塘的风景并加以描写.一些哲学家及作家则讨论风景倒置所带来的象征意义.这也是乞斯特尔顿③最爱用的题材之一.他

① Piet Mondrian.
② Matisse.
③ G.K.Chesterton.

最有名的神秘小说《诗人和狂人》①——我认为是他最好的小说——所讲的诗人盖尔(Gabriel Gale)便常常金鸡倒立来看风景.如此他可以‘看到景物的真相,星星像花朵,浮云像山峰,而且上帝把每个人都一个个地倒挂在地球下”.

【115】 有些画如果转 180 度，看上去便和原画大不相同.这就是利用人类的心灵不能马上接受上下颠倒的景物而产生的惊讶所致.19 世纪里，许多制作政治漫画的画家常常用这种手法.读者看到的是一位政治名人，倒过来看马上变成一头肥猪或蠢驴或其他带有贬损意味的事物.如今这种漫画已不大多见.但是 1950 年 9 月 18 日的《生活画报》上重印了一张意大利文的漫画,画的是加里巴尔狄(Caribaldi——对意大利统一有极大贡献的意大利民族英雄.——译注)的像,上下一颠倒却活像斯大林.许多儿童杂志中常见到这种可以上下颠倒看的插图，现在多半是用在广告画上了.1953 年 11 月 23 号出的《生活画报》封底画的是一个印地安奴隶察看他种的玉米.倒过来看变成一张张大了口的人像，盯着一个打开了的玉米罐头,口水流得长长的.

据我所知有四本书专门收集此种上下颠倒的画.1924 年逝世的专门为儿童读物做插画的勒威尔先生②就出版了两本彩色画集.里面的画倒过来看就变成不一样的图.一本是 1893 年出版的《颠倒翁》③,另一本是 1894 年出版的《颠倒翁第二集》.1946 年有一位伦敦的出版商发行了一个专集,其中有十五张颠倒人像,全是英国的壁画家威斯勒先生④所画.这位老兄在 1944 年去世.其作品之一便是图 53 所刊此书的封面,书名叫 ¡OHO!.

① *The Poet and the Lunatics*.

② Peter Newell.

③ *Topsys & Turvys*.

④ Rex Whistler.



图53 威斯勒所画的颠倒专集封面上的颠倒人像【116】

这种画颠倒画的技巧到 1903 年、1904 年间可以说是被提高到一个难以置信的高度，这归功于有名的维尔比克先生①. 每个星期天,《纽约先锋报》②的漫画版里总有他的一联六幅的彩色漫画. 这六幅画要顺着次序看，每一幅下面都有叙述故事的脚注. 然后再颠倒来看,顺着反过来的次序读脚注看人物,故事也毫不中断地继续下去.(见图 54)维尔比克的漫画故事中有两个主角,一位是个小女孩,名叫露金丝;另一位是她爸爸米发尔. 将这些画颠倒过来看时,小女孩和她爸爸的角色也相互转换. 这位维尔比克先生怎样能够每星期一直不断地画下去真是完全无法想像的. 1905 年有一位狄林汗先生③收集了二十五联漫画出了本专书,书名就叫《露金丝

① Gustave Verbeek.

② *New York Herald*.

③ G. W. Dillingham.

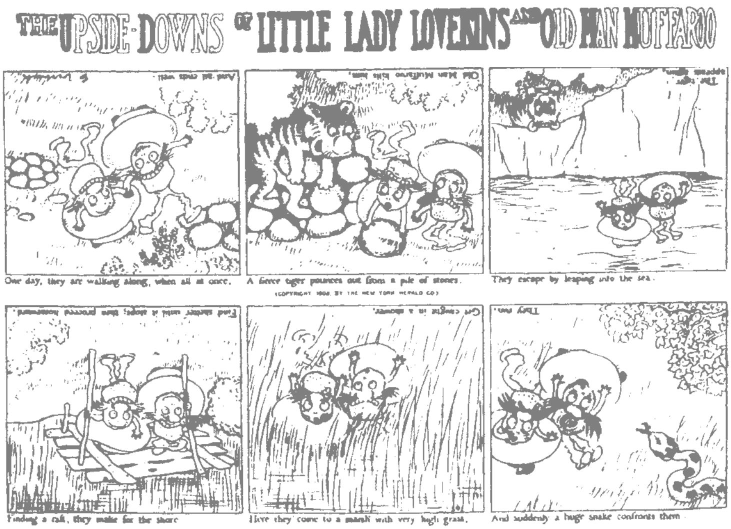


图 54 维尔比克画的上下颠倒漫画

和米法尔历险记》①. 这本书已经成为珍藏本了. (本书国内有译本,武汉大学出版社 1994年 5月出版,译者黄莹.——译注)

在这种画中,利用 90 度旋转技巧的画似乎不多. 主要的原因可能是人类的视觉可以预期旋转后的效果. 不过,如果技巧高超也会有很好的效果. 最好的例子是 17 世纪的一位瑞士画家梅里安先生②所画的一幅风景画,若依顺时针方向转 90 度来看却变成一位男士的侧影. 图 55 中的鸭子变兔就是可以转了 90 度后来看的画中名作. 很久以来,好些心理学家利用这张图给人做不同的试验. 几

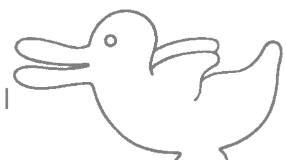


图 55 顺时针旋转 90度后鸭子变兔的画

① *The Upside-Downs of Little Lady Lovekings and Old Man Muffaroo*.

② Matthäus Merian.

年前，哈佛大学的哲学家怀特先生①从杂志中复印了这幅画并写了一篇文章，以这幅画来说明为什么两位历史学家在检验完全相同的历史资料之后，会对同一事件有全然不同的看法．

因上下颠倒而产生的一些令人叹为观止的光学幻觉大都是因为人类自有史以来便只习惯于这种与生俱来的视觉．许多天文学家都知道月球最好是从照片中来观察．这样，太阳光才好像是从上面照下去，将月球球面上的火山口显出来．若亮光从物体的下面照上来，我们就非常地看不惯．将这些照片颠倒过来看，这些火山口马上变成了浮起来的平台．图 56 是一个常见的光学幻觉．图中的蛋糕切去了一块．将图颠倒过来看，整个蛋糕又变成被切下来的那一小块放在盘子里．这个幻觉产生的原因就是我们一向都是从上面看蛋糕和盘子，不习惯倒过来看．

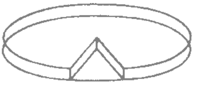


图 56　切下来的蛋糕在哪里？

人的两个眼睛不太靠边，也差不多是在下巴到头顶一半的地方，所以画不出上下可以颠倒的人脸．大家不会忘记小时候在学校常常将历史书上有名人物的像倒过来，再在额头上加上嘴或鼻子的恶作剧．

以上的恶作剧如果真的用眉笔和口红在真人的脸上乱涂，所得的【118】效果常常更令人捧腹．所以在 19 世纪这竟然是许多家庭聚会中常玩的团体游戏．有一本老书叫《今晚做什么好？》，书中有以下的一段：

> “被砍下来的头会引起强烈的反感，最好不要突如其来地显示给神经质的人．……一张很大的桌子摆在房间的正中央，桌布下垂到地，整个桌子都罩在桌布之下……选一个头发又软又长的小孩来做‘人头’．他仰睡在桌子上，除了鼻梁以上的脸部，其他完全看不见，全都在桌布下．

① Morton White．

小孩的头发仔细地梳理朝下，看上去像胡子，接着要画一张脸……在面颊和额头上画上假眉毛、嘴和鼻子，更加上一笔小胡子. 这些全要用最黑的墨汁来画，原来的眉毛上撒上一点点面粉，整个脸上也加些白粉，看上去有死亡的惨白色……

最后将整个房间的灯光转暗，除了掩饰‘化妆’的缺陷之外，整个气氛也更加强烈……”

如果这个“人头”突然会张开或眨眼睛甚至左右转来转去地看,脸颊(现在成了额头)再皱一下,恐怖的气氛当然更为提高,这是用不着说的了.

有一位物理学家伍德先生写过一本书，书名是《如何区分鸟和花》①.他有另一套方法玩‘人头’恶作剧.人头当然是上下颠倒,和前面讲的一样.不过,这一次被盖住的部分是额头、眼睛和鼻子,只有下巴和嘴是露出来的.下巴上画上眼睛和鼻子，看上去成了一幅傻瓜蛋的怪脸,长一张极大的嘴.电视上常常表演腹语的温乞尔先生②便喜欢用这样的脸来做道具.他把所做的假人戴在头上，并给他一个名字叫奥斯瓦(Ozwald).利用电视摄影机的特技使奥斯瓦在电视上看起来是上下颠倒的.1961 年好些玩具店还卖奥斯瓦给小孩，加上假身体和一面镜子,让奥斯瓦的脸颠倒过来看.

有些词语(这里所讲的字全是英文字,不但不可能译成中文,即使乱译一通也会失去原意.所以这一段不得不出现好多英文字.——译注）的一串字母写出之后会有双重的对称.例如圣地亚哥的动物协会所印的杂志，名叫 ZOONOOZ.这个词上下颠倒看全是相同的.我看见过一个招牌，挂在一个游泳池的旁边.这招牌上的句子，运动员正立倒立读都是一样的. 这是我所看到的如此的句子中

① *How to Tell the Birds from the Flowers* by Robert W. Wood

② Paul Winchell.

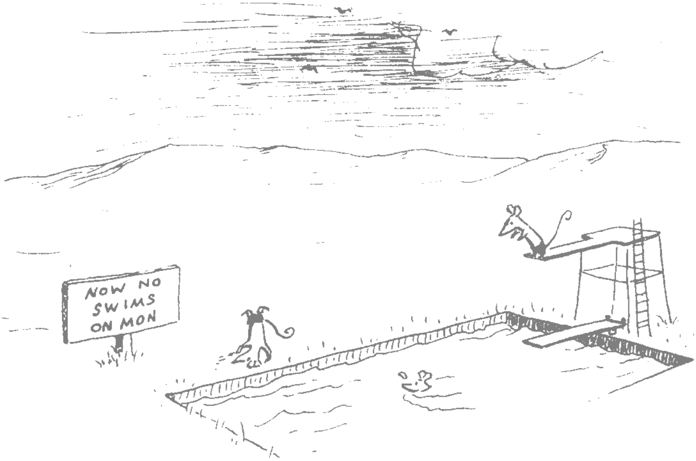


图 57 招牌上的字上下颠倒读都是一样的

最长的一个.这招牌上写的是:NOW NO SWIMS ON MON（见图 57).

将数字颠倒的游戏比较容易做.例如许多人都注意到 1961 就是一个颠倒之后仍然相同的数.1881 年之后，第一个可以颠倒的数便是 1961.再下面是 6009,这是从公元 1 年后第 23 个这样的年份数.从公元第 1 年开始到 10 000 年为止,如此的数只有 38 个(根据颇墨柔先生①的统计),其中间隔最长的就是 1961 到 6009.鲍尔斯先生②在 1961 年 12 月份的《数学公报》③上写了一篇文章,说根据他所用的计算法,到公元 1 000 000 年，如此可以颠倒两读的年份数共有 198 个之多.1961 年 1 月号的《疯狂杂志》(MAD)就因为这一年的年数可以颠倒两读而预测 1961 年将是非常疯颠的一年. [20]

有些数字,例如 7734(写 4 的时候上面要开缝）倒过来看就变成一个英文字.有些数字在镜子里的反像是一个英文字.这种例子

① John Pomeroy.

② J.F.Bowers.

③ *Mathematical Gazette*.

并不多见.读者不妨从这个角度来看下面的几个问题.

1. 一位李先生(Oliver Lee)44 岁,家住大街 312 号.他向政府申请新发一张汽车牌照，而且指明要 337—31770.为什么？

2. 请证明图 58 中的运算是正确的.

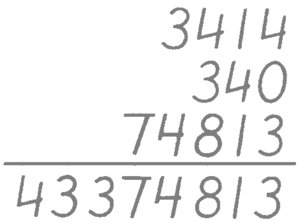


图 58　这个加法正确吗？

3. 请在下面的 12 个数字中圈出 6 个,使其总和是 21

1　1　1

3　3　3

5　5　5

9　9　9

4. 一个篮子中有半打以上的蛋，有白的，有黄的.白的有 x 个,黄的有 y 个.将 x 和 y 相加，再上下颠倒之后读，又正好是 x 121】和 y 的乘积.请问篮子里共有多少蛋？

答案

1. 将 337—31770 倒过来看就是‘OLLIE—LEE ",即 Oliver Lee 的昵称.

2. 从镜子里看总和.

3. 将整个排列倒过来，圈三个 6 和三个 1 ,总和是 21.

4. 篮子中有 9 个白蛋和 9 个黄蛋,相加之和为 18.倒过来看是 81 ,正是两个 9 的乘积.问题中说过篮子里的蛋超过半打，即超过 6 122】个.如果没有这个条件,3 个白蛋,3 个黄蛋也是可以接受的答案.

第 11 章
单人跳棋

“一种称之为单人跳棋的游戏,让我十分欣赏,’德国的大数学家莱布尼兹[①]在 1716 年写给他朋友的信中提到,“不过我更喜欢反过来玩，那就是说不要依惯常的玩法，每跳过一个棋子之后便吃掉它.倒不如每跳过之后却填进一个棋子以便将原来所布的棋局再重新缔造回来.这种玩法，玩的人要设计一套跳法，跳完之后棋盘上会呈现预先设计好的图案.这可不可能呢？我想是可能的.因为棋子可以吃掉的话就一定可以填回去.你会问为什么要这样反过来玩？我的回答是为了提高新发明的境界.任何使用理性所发现的事物，我们都应该有办法把它造出来.”

莱布尼兹的最后一句话的意义有点暧昧不明.他的原意可能是说任何一个合逻辑或数学的体系都是值得仔细地去分析的.

不论值不值得去分析，这种单人跳棋已经流行了很长的一

① Gottfried von Leibniz.

段时期。它的起始已无可追溯。不过有人说这个游戏是巴斯底大狱里的一个犯人发明的。19世纪后叶，有许多法文书籍和文献讨论这个游戏。由此或许可以看到当时它在法国很流行。我相信爱读我的专栏的读者有不少都曾在这个游戏上绞尽脑汁。现今美国有好几家厂商以不同的牌名出售这种游戏。有些棋盘上有小洞将一个一个小柱子似的棋子插来插去。有些棋盘上有许多浅浅的半圆小坑以便将小玻璃珠移来移去。用玻璃珠的棋盘玩起来方便些。当然各位也可以画一个棋盘,用硬币、豆子或筹码来玩(图59)。

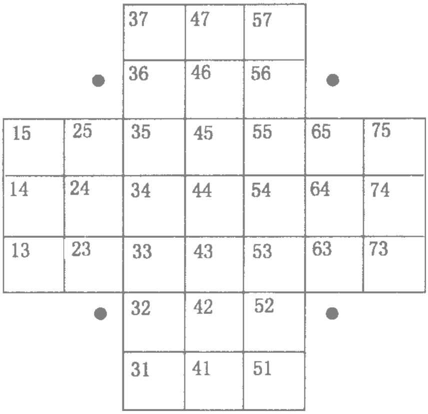


图59　单人跳棋的棋盘

在美国、英国和前苏联最流行的单人棋盘上共有三十二格。法国的棋盘多四格,如图59中的四个黑点所示。西欧的其他国家则两种棋盘都有。法国式的棋盘不那么吃香，大概是因为如果除了最中间一格之外，棋盘上所有的格子都填满了棋子的话，这个棋局无法逐个地被‘吃’掉而只剩下一个。每一格都用传统的方法用一组两位数来编号，第一个数是说明此格在从左到右数的哪一列，第二个数是说明此格在从下往上数的哪一行。

最基本的问题——许多厂商都从介绍这个问题开始——是将棋盘上，除了最中间的一格之外，都先摆好了棋子，然后再设计一套跳法，可以“吃”掉所有的棋子而只剩下一粒。最漂亮的棋局当然是剩下来的一粒正好在棋盘的最中间。所谓‘跳’一次,就是让棋盘上的棋子跳过另一个棋子之后而能停在一个空格里。那个被跳过的棋子就要被拿掉，也就是说被“吃”掉了。这和普通的跳

棋一样。不过，这里规定棋子只能上下、左右跳，沿对角线跳是不允许的。

每一步都得跳。如果到了无棋可跳的局势便成僵局而停止。同时，只要有棋可跳，便可以一直跳下去，一连吃掉好几个棋子都可以，何时停止全由玩的人自己决定。一连吃掉好几个棋，也只算走了一步。原本要解决这种棋局的谜题，必须要走31步。但是假如可以连吃的话，就可以少走几步。

棋盘上先摆满了棋子，而走到最后一步就只剩下一个棋子在棋盘的最中央，到底有多少种跳法？没有人知道详数。不过已经有

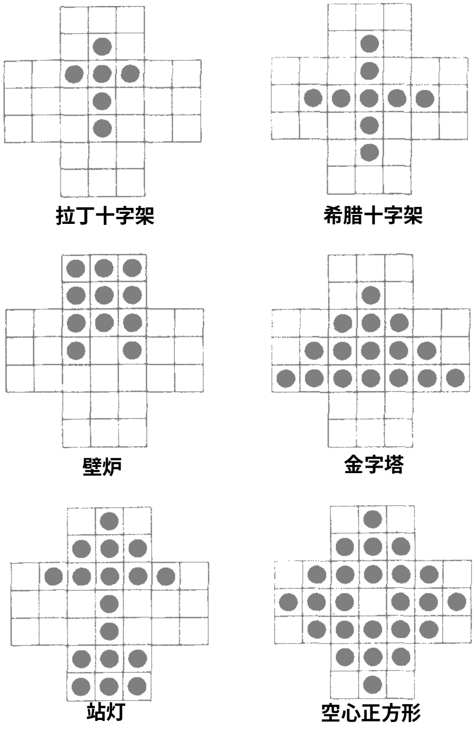


图60 最后一个棋子必须在最中间一格的一些常见布局

几十种跳法被发表.有些读者或许不太熟悉这种单人跳棋，请他们先试一下图 60 中的各种比较简单的布局，每一局跳完之后必须只剩下一个棋子在最中间.

读者熟悉之后，我们再回头讨论整个棋盘吃得只剩下一粒在棋盘最中间一格的棋局.图 60 中的拉丁十字架很容易解决，只要走以下的五步：45—25，43—45，55—35，25—45，46—44.

各位熟悉了以上常见的布局之后，可以再试试图 61 中的三种棋局.这些棋局开始前，整个棋盘除了最中间的一格外，全布满了棋子，现要求最后走成这三种图案为止.第一个相当容易，其他两个则不然，尤其是风车局，走六步之后便会变成一个僵局.各位不妨试试看.

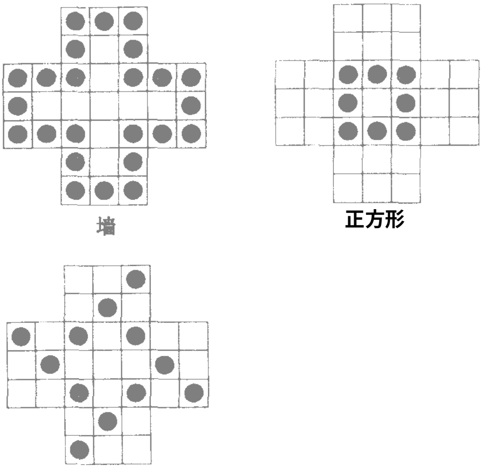


图 61　走完棋后要将这些图案留在棋盘上

好些爱玩单人跳棋的能手，会为自己设定一些极难下手的布局.有一位白尔哥特先生①，在 1920 年写了一本《论单人跳

① Ernest Bergholt.

棋》①，就提供了许多精彩绝伦的棋局，并且加订了好些奇怪的限制.（所有的问题全以满盘开始，但空格不一定是最中间的一格.）有一种棋局他称之为“独子棋”，一盘棋子里有一个特别的棋子——可能是颜色和其他的棋子不同——要留到最后才可以动，动的时候，它会吃掉一个或多个棋子而成为唯一仅存的“独子棋”.还有一种棋子，称之为“死棋”，这一个棋子要到最后才准被吃掉.而所谓的‘一扫而光”,就是最后一步是连续跳,把棋盘上所剩下来的棋一扫而光.白尔哥特设计了一些棋局，最后一扫而光吃掉八个棋子；并且他还说，如果开始时角上有一个空格的话有一种走法，在最后一扫而光时可一共连吃九粒棋.

一个布满三十二个棋子的满局，最多只要走多少步可以吃得【124】只剩一个？人们认为不能少过 16 步.但是 1963 年戴维斯先生②却找到了一个 15 步的走法.条件是开始时 55 或 52 格必须是空格.如果 55 是空格，最后一粒棋也留在 55 格，它的走法是：57—55, 54—56, 52—54, 73—53, 43—63, 37—57—55—53, 35—55, 15—35, 23—43—45—25, 13—15—35, 31—33, 36—56—54—52—32, 75—73—53, 65—63—43—23—25—45, 51—31—33—35—55.如果一开始的空格是 52,戴维斯也有一套 15 步的走法最后一粒棋子留在 55 格.

假如开始的空格是 54 或 57(包括所有的对称的情形在内),戴维斯有一套 16 步的走法.如果空格在其他格子(最中间的一格,或 46, 47 及其对称格等等),戴维斯有 17 步的解.

最起始的空格，最后所占的格子，这之间有二十一种不同的组合（旋转和反射的情形当然不包括在内）.下面的表格列出了戴维斯发现的最少步数：

① *The Game of Solitaire*.

② Henry O. Davis

起始空格	最后棋格	步数
13	13	16
13	43	16
13	46	17
13	73	16
14	14	18
14	41	17
14	44	18
14	74	18
23	23	16
23	53	15
23	56	16
24	24	19
24	51	17
24	54	17
33	33	15
33	63	16
34	31	16
34	34	16
34	64	17
44	14	17
44	44	18

从上表可以看到，如果开始的空格是 44，最后的棋子又占住 44 格，一共要走 18 步．杜丹尼先生在他的名著《数学中的乐趣》①中记载有一个 19 步的解答．他并且说"我相信这个步数是不可能

① *Amusement In Mathematics*.

再减少了.”可是白尔哥特在他的书中就有下列的 18 步解：

46—44,65—45,57—55,54—56,52—54,73—53,43—63,75—73—53,35—55,15—35,23—43—63—65—45—25,37—57—55—53,31—33,34—32,51—31—33,13—15—35,36—34—32—54—34,24—44.

(杜丹尼的答案最早是发表于 1908 年，而白尔哥特的答案发表于 1912 年.)

“我敢大胆确定,’白尔哥特先生说‘这个纪录大概不会被人打破.’剑桥大学的比斯雷先生①,的确也证明了 18 步是最小的答案.其实，白尔哥特的答案之倒数第二步的连跳，如果不被中断的话,则原来在 36 格的棋子就变成了‘独子棋”,最后连吃六个棋子一扫而光停在 14 格上,一共就只走了 17 步.

由中间是空格开始，最后再走到中间一格，有不同的走法.虽然走的步数不是最少，但是都相当对称.现在让我们看看下面的例子.

“壁炉型”②的走法如下：

42—44,23—43,35—33,43—23,63—43,55—53,43—63,51—53,14—34—54—52,31—51—53,74—54—52,13—33,73—53,32—34,52—54,15—35,75—55.

此时，棋盘中的棋子所成的图案正是图 60 中的‘壁炉型”,也是此题的正解.但是一位理察森女士③却将上述的走法减少了 3 步.她的答案发表在 1930 年若波女士所汇编印行的小书《谜棋术》④中.以下再介绍两则刊载在同一本小书中的棋局.

① J. D. Beasley.
② *The Fireplace*.
③ Josephine Richardson.
④ *Puzzle Craft* by Lynn Rohrbough.

“六跳型”:46—44，65—45，57—55，37—57，54—56，57—55，52—54，73—53，75—73，43—63，73—53，23—43，31—33，51—31，34—32，31—33，36—34，15—35，45—25，15—35. 到此为止，所成的图形是左右对称的，下一步“六格跳”(43—63—65—45—25—23—43)将图形变成一个 T 型. 最后的几步是：44—64，42—44，34—54，64—44.

【127】 “胡言乱语型”：46—44，65—45，57—55，45—65，25—45，44—46，47—45，37—35，45—25. 到此为止所成的图形又是左右对称的，以下的 16 步又可以同时用左半及右半的镜像来反映：

左半	右半
15—35	75—55
34—36	54—56
14—34	74—54
33—35	53—55
36—34	56—54
31—33	51—53
34—32	54—52
13—33	73—53

最后的几步是：43—63，33—31—51—53，63—43，42—44.

单人跳棋游戏牵涉到数学中的哪些理论还没有被人完全理解. 某种棋型形成之后是否可能转化成另一种棋型，这是娱乐数学里至今尚未能解决的主要课题之一. 在这方面贡献最多的是一位中学数学教师察若西先生,他借《数学学生月刊》①的园地,在 1962 年 3 月发表了一系列非同等闲的定理. 将这些定理综合在一起,他

① Mannis Charosh and *The Mathematics Student Journal*.

得到一些非常有用的技巧，使一些单人跳棋中不可能得解的问题有了明确的证明．早在他之前，一位厄马瑞先生①曾做过一些分析．法国的数学家卢卡斯把这些分析汇集在他的名著《论娱乐数学》②的第一卷中．而察若西先生就将这些早期的分析重加简化并推广．

察若西先生的方法是在他选定了开始的棋子布局之后就先验证是否可利用一串变换而达到最终的布局．如果可以转换而成，这两种布局则可称之为是‘等价’的．如果两个布局不等价，光靠跳棋的运作无法将一种布局变成另一个．(从莱布尼兹的观点来看，也就是最后无法将空格反填到开始时的布局．)两个布局若等价也不一定只有唯一的方法按跳棋的规则得到最后的答案．所以这里所用的方法，对任何布局来说只是可能求解的必要条件，但不一定是充分条件．

察若西先生所用的转换法，着眼在任何一连三个横格或直格．【128】如果三格都有棋子，就把它们全部‘吃’掉 如果三格都是空的则全部要填满；如果只有两格有棋子，这两个棋子要去掉，同时原来空的那一格又要再填上；如果相连三格只有一个棋子，这个棋子要去掉，并且其他两个空格又要填满．

让我们利用这种转换法来讨论图 60 中如今已经成为经典的老问题，那就是起跳之前棋盘中最中间的一格是空格．首先我们看得出来，所有一排三个的三子组皆可以被拿掉．最后只剩下 45 和 43 格各有棋子一粒．43，44，45 是一排的三格，45 和 43 是一头一尾．所以我们可以把这两个吃掉，同时放一个棋子在 44 中．也就是说整个棋盘中只有 44 格里有一粒棋子．经此分析，我们知道空 44 格和只有 44 格里有棋子是等价的两个布局．因此不是不可能的

① M. H. Hermary.

② *Recreations Mathematiques* by Edouard Lucas.

（当然实际上我们已经有了好些答案）.利用察若西先生的转换法，不论开始时哪一格是空格，都有不同的跳法直到只有这一格有棋子的棋局.这些跳法有些我们已经知道了.

假如开始时空格是中心 44，能不能跳到最后只剩一粒棋子在 45 格？答案是否定的.利用察若西的转换法是无法做到这一步的.我们并不一定要用满盘的棋来证明这个结论让我们放一粒棋在 44 格上(因为这是可能得到的终局),再来看这一粒棋有没有办法转到另外一格里去.例如,去掉 44 格上的棋,然后在 54 格和 64 格上各放一粒(因为 44,54,64 是一条直线上的三连格）.54 和 64 上的棋又可以去掉,换成 74 上的独棋.故而 44 格上的独棋等价于 74 格上的独棋.换句话说，假如某一格上有一独棋，这种布局和与此格或横或直相隔两格外的格上有一独棋的布局是等价的.故而 44 格中有棋只与 14,47,74 或 41 格上有棋的布局是等价的.如果【129】由中心的空格开始,只能终局于这四格上有棋的棋局.各位练习多次之后便会自然地得到这个结论.因为最后一步想把棋子放在 44 格上，就要倒过来走将这一粒棋放在那四格中的任何一格.最后的一步前只有这步可走，别无他途.

利用察若西转换法，任何一个全新的棋局或残局都可以转换成三种终局：即只剩一个棋子的终局，或者两个在对角线上并且相互对称的终局，或者一个棋子都没有的终局.最后一个可能性在实例中当然是不存在的.因为它的等价棋局是一线三格上都有棋，或者一线两格上有棋而又彼此相隔两格之遥.这都是不可能达到的终局.有一点我们可以看到，在察若西的转换法之下，每一个终局都和它的‘反型’等价——所谓反型（inversion），就是在同一格中，原来有棋的变成空格，而原来的空格变成有棋.例如，假如从满盘棋上把 37 和 46 两个对角相邻格子中的棋子吃掉，这局棋就等于空棋盘上只有这两格有棋.这两粒棋是无法靠转换法变成只剩一粒棋的.故而,假如一开始 37 和 46 是空格的话，就无法跳到最后

只剩一粒棋子的终局.

读者中或许有人有兴趣去寻找单人跳棋的新问题如果知道察若西的转换法，便可以不必在不可能有转换的问题上浪费时间.可是有些问题已被认定不可能有转换，但是仍然会有人勇往直前去求解.有时能找到答案，有时又找不到.在寻找答案时,莱布尼兹所提倡的‘以填代吃’的玩法也可以节省大量时间.棋子也可以先编号而依跳的顺序记下号码，就不必每一局棋都记录了.跳完之后如果成功，只要将棋格的号码和棋子的号码对照一下，便可以知道整局的顺序了.

1960 年一位卡尔生先生①提出一个有趣的问题：正方形的单人跳棋棋盘上，相似的问题有没有解？所谓相似的问题就是开始时是满盘，只在角上某一格留为空格.最后又只剩下一粒棋子.假如可能的话，这正方形的棋盘至少要有多少格？用察若西转换法来判断，马上可以知道这正方形棋盘的格数,每一边都要是 3 的倍数才行.可是 3×3 的棋盘已被证明无解,所以 6×6 棋盘是最可能的.在图 62 中，最初的空格是在角落上.终局时,如果有答案的话,最后的棋子也正好在这一格，或者是和它等价的另外三格.（假定这一格编号为 1,其他三个等价格就是 4, 19 和 22 格.）

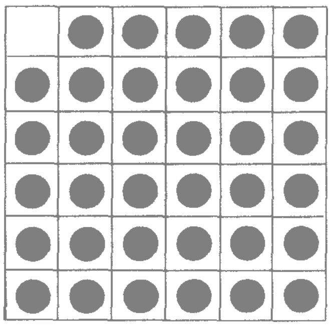


图 62 6×6的棋盘问题

这个问题有解吗？卡尔生自己就找到一个 29 步的解.不过最后的棋子是在 22 格上.现在要继续努力的是找一个解，使开始的空格和最后有棋的一格都是第一格.

① Noble D. Carlson.

增注

有好些读者来信告诉我，早期用来验证单人跳棋有解或无解的方法,大都大同小异.一些比较有价值的文献我都包括在书后的参考书目表之中.包括比斯雷将许多剑桥大学的数学家们所得到的结果而汇集成的一份报告.(这些数学家包括康威,赫金斯,和波德曼诸位先生.)①自从比斯雷的文献发表之后，他和康威先生有更进一步的研究,不过他们的成果尚未发表.另外还有一位数学家爱克尔斯先生②也将他的办法寄给我，和察若西的转换法十分相似.他把每一个不同的格子都编上号,凡是'等价'的格子就用同样的号码.

还有一位哥登先生③，他是一位物理学家.他告诉我早在15【131】年以前就知道一个重大的发现.一个棋局以某个空格开始而最后一粒棋又留在同一空格上,他说如此的棋局的解全是'可逆'的.那就是说以相反的方向重新跳一遍也可以得到同样的终局.这和莱布尼兹用空棋盘开始'以填代吃'的反玩法不是同一回事,千万不可误解.他是说起局完全相同只不过跳棋的顺序完全相反而已.例如6×6的正方棋盘，哈里斯先生④有一个16步的解.如果逆序而行,由13—1开始然后走25—13,27—5等等，将前解中最后一步一扫而光的八连跳也反向进行，则得到一个有31步之多的异解.戴维斯先生又同时指出从只留一个空格的满盘开始，终局只剩一个棋子但不在原来的空格上，如此的棋局的走法也可以反向进行.如果从空格A开始走到B格上有棋为止，这个解法倒行之后则变

① J. H. Conway, R. L. Hutchings, J. M. Boardman

② Sheldon B. Akers.

③ Gary D. Gordon.

④ John Harris.

成从空格 B 开始,终局时棋子却留在 A 格上.

许多和单人跳棋同构的问题常被当作普通跳棋问题提出.这种问题中最老也最为人所知的问题是：一个标准的跳棋盘上，最外两圈二十四格黑格上摆了二十四枚棋子，有没有办法逐个吃掉到只剩一个为止？郎曼先生①在 1954 年 9 月份的《数学手稿》②以及他所写的《让我们玩数学》③一书中便讨论过这个问题.早在 1938 年 10 月份的《游戏选摘》④上也讨论过这个问题.听说更早在 1900 年便就有人提起过这个问题.史提华先生⑤早在 1941 年就说过在单人跳棋的棋盘上新造一个同构问题并且检验其可能性是很容易的（见书后的参考书书目表）.他的看法并没有受到很多人的认同.但是若跳棋盘上两个对角上任何一格的棋子先拿掉,则有很多解.

康威先生告诉我，一个标准单人跳棋的起局若最中间的一格留为空格,则可以在 4 步之内走成一个无法完成的棋局.这 4 步是 跳人中间一格,吃掉中间一格的棋,再跳人中间一格,再将中间一格的棋吃掉.第一步和第四步要方向相同.这是搅局的最短跳法.4步即可搅局的跳法只有这一种.跳 5 步搅局有两个方法.每一种所得到的结果并不相同.

白尔哥特先生在他的关于单人跳棋的书中说过，用一个标准【132】的棋盘，空格留在棋盘的角落则有可能是用九棋连吃作为最后一步走到终局.可是他并没有把答案列出来.据我所知,戴维斯先生于 1967 年发表了一篇漂亮的文章重新找到这个难题的一个 18 步

① Harry Longman.

② *Scripta Mathematica*.

③ *Play Mathematics*(New York: Hafner 1962), P 203 - 6.

④ *Games Digest*.

⑤ B. M. Stewart.

的答案（详情请参阅书后所列的参考书目）. 戴维斯先生在同一篇文章中又指出，只要是一个标准的棋局，不论最初的空格在哪里，都无法有超过九子的连环跳.

这一篇文章里我们提到戴维斯先生好几次. 他对单人跳棋问题发生兴趣是在 1962 年读了我的专栏之后才培养出来的. 自此之后他取得了许多新的发现，扩展问题是否有解的试测法，如何找到步数最少的解答，甚至扩展到三维空间（他称之为"三维单人跳棋"）. 这些新发现足够写成有相当份量的书. 可惜直到现在为止，他只发表了一篇列入参考文献中的文章. 听说最近他和菲尔颇特先生①除了共同研究正交棋盘（orthogonal）上的单人跳棋问题，也研究等距棋盘（isometric）上的问题. 这些问题是很重要的. 有关等距棋盘上的单人跳棋的细节请参阅 1966 年 2 月份和 5 月份的《科学美国人》月刊上我的专栏.

答案

除了拉丁十字架之外的前五个问题，好些读者提供的答案都比《科学美国人月刊》上所刊载的要短些. 所以我不但将这些较短的答案公布于下，也将提供这些答案的各位读者的大名附上.

希腊十字架：答案共有 6 步；54—74，34—54，42—44—64，46—44，74—54—34，24—44.（颇约②先生和戴维斯先生）

壁炉：答案共 8 步；45—25，37—35，34—38，57—37—35，25—45，46—44—64，56—54，64—44.（除颇约和戴维斯先生以外再加上约翰逊③先生）

金字塔：答案共 8 步；54—74，45—65，44—42，34—32—52—

① Wade E. Philpott.

② R. L. Potyok.

③ W. Leo Johnson.

54，13—33，73—75—55—53，63—43—23—25—45，46—44.（戴维斯先生）

站灯：答案共10步；36—34，56—54，51—53—33—35—55，65—45，41—43，31—33—53—55—35，47—45，44—46，25—45，46—44.（戴维斯和汤姆森先生①） 【133】

倾斜的正方形：答案共8步；55—75，35—55，42—44，63—43—45—65，33—35—37—57—55—53—51—31—33—13—15，75—55，74—54—56—36—34，24—44.（戴维斯先生）请注意答案中有一步一口气吃掉十一个棋子.

（以上各图见图60）

围墙：64—44，34—54，46—44，14—34，44—24，42—44，54—34—14.这已经是一个完整的答案.再跳下去的话就只剩下正中央那个3×3的正方形中四个角落上的棋子.

正方形：46—44，25—45，37—35，34—16，57—37—35，45—25，43—45，64—44，56—54，44，64—23—13，31—32，43—23，63—43，51—53，42—63，41—43.最后几步已经十分显然，左边可以走15—35，14—34，13—33，和它相呼应的右边可以走75—55，74—54，73—53，到此为止，已经得到所希望完成的图形.再走四步的话，只有下面四个棋子存留，即36，65，52，23.这是一个倾斜的正方形.如果不知道前面的几步，这是一个相当难做的图形.

风车：42—44，23—43，44—42，24—44，36—34，44—24，46—44，65—45，44—46，64 44，52—54，44—64.到此为止所做成的图形有四重对称性.用以下各步即可完成此题；31—33，51—31，15—35，13—15，57—55，37—57，73—53，75—75.到此成了僵局.

（以上各图见图61）

若棋盘上除了最中间的一格是空格外都是满盘，要把这个棋局

① Hugh W. Thompson.

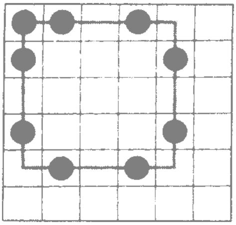
走成不能再走的僵局至少要以下 6 步：46—44，43—45，41—43，24—44，54—34，74—54. 做成僵局的下一个次短的步数便要 10 步了.

梅森先生①寄给我一份简单的证明，证明 6×6 正方形棋盘上的问题至少要用 16 步才能完成（连吃几个棋子只算一步）.第一步是 3—1,或者与之等价的对称棋步.走了这一步，四个角落上全都有了棋子.角落上的棋子是无法被吃掉的.所以它们都要先动(包括 1 格的棋子在内，并且最后走到最中间的一格).这四步棋,加上第一步，一共是不可少的五步.现在来考虑棋盘外缘的位于两角之间的棋子，若这样的两个棋子相连，是无法同时被跳过而吃掉的.所以其中之一必须先跳开.所以左右两边及底边至少要有两个棋子先跳开才能打开所有相连的棋子.最上面一排（假定第一步是 134]3—1)则只要先跳开一个就行了.这又加上了 7 步.所以到此为止一定要走 12 步才行.那么现在才可以考虑棋盘中间的十六个棋.其中有四个(8，9，14，15)不可能被跳吃,所以其中之一必须先跳.如此四个相连在一起的奇组共有四组，因此至少要走 16 步.梅森先生最短的答案是 18 步，不过他一直在思索，这个解答能不能再缩短.

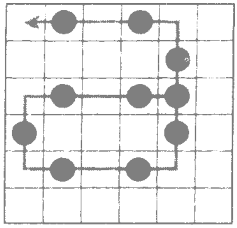
令我叹为观止的是一位哈瑞司先生②终于带来了人们梦寐以求的最终答案——一个漂漂亮亮的 16 步答案：3—1，9—7，21—9，33—21，25—13—15—27，31—33—21—19，29—27，16—28，24—22，18—16，6—18，36—24—12，3—15—17，35—33—21—23，4—16—18—8—4，和 1—3—5—17—29—27—25—13—1. 请注意最后一步是"八棋连跳".图 63 的左图就是跳最后一步前的局势.1964 年,戴维斯先生找到 6×6 棋盘上另一棋局的 16 步解,而且开始时的空格可以是任何一格.

① Robin Merson.

② John Harris.



八子连跳的情形



九子连跳的情形

图 63

最后一步的连跳，最长的答案是九子连跳. 这是万德普先生①发现的. 那是 18 步答案的最后一步：13—1, 9—7, 1—13, 21—9, 3—15, 19—21—9, 31—19, 13—25, 5—3—15, 16—4, 28—16, 30—28, 18—30, 6—18, 36—24—12—10, 33—21—9—11, 35—33—31—19, 17—15—13—25—27—29—17—5—3—1. 图 63 中的右图便是这最后一步的九子连跳.

万德普先生也研究过长方形的棋盘，角落上的一格作为原始的空格. 他证明了如此的棋盘，包括正方形在内，只要有一个方向是一排三格或 3 的倍数格都有答案，只有以下的例外：

1. 一个方向上只有一格(3×1 不在内)；
2. 一个方向上只有两格；
3. 3×3 的正方形棋盘；
4. 3×5 的长方形棋盘.

① Donald Vanderpool.

第 12 章
平面国漫游记

有些时候，讽嘲性的表述却以狂想曲的形式出现。用不同的动物，或根本不存在的环境，其中生活习俗和物理规则都与人间迥然不同，将人类的习俗和各项正常制度加以漫画式的刻划。用二维空间里人物的移动作为讽嘲的基础，在历史上如此的尝试已经出现了两次。从文学的眼光来判断，这两件作品都算不上是杰作。但是从数学的眼光来看两者都颇有创意，娱乐价值也相当高。

最早的一本是《平面国漫游记》[1]，1884 年初版(如今仍然可以买到),也是两本书中较为有名的一本。写书的人是阿宝先生[2],他是一个教会里的职员，也是一位校长，写了好些学术性的书。本书初版用的笔名是方方正正的“方正”。书中的叙述者方正先生就是一个正方形。他只有一个眼睛,长在正方形的一个角上(没有脚,没

① *Flatland*.

② Edwin Abbott Abbott.

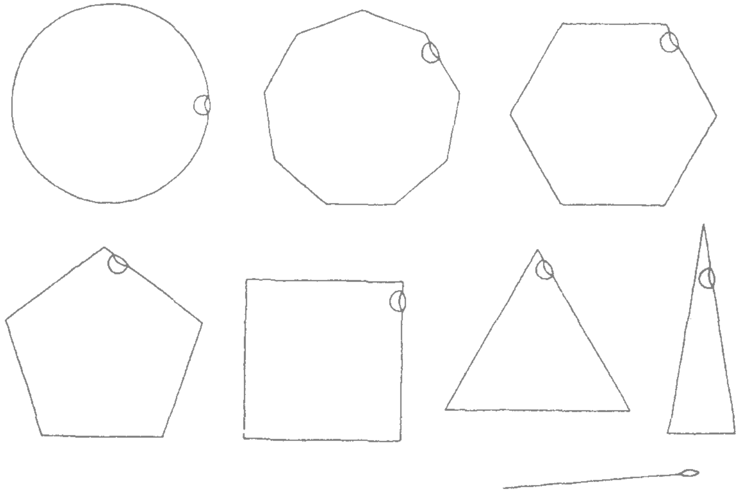


图 64　一只眼的平面国的国人，按社会等级排列

有手,如何在平面国中移动,如何能写得出这本书,书中都没有详加说明,见图 64).

阿宝的平面国是像地图似的一片平原.平面国的国人就在这平原上滑动.他们都有一条发亮的边，但是却完全没有高度.所以【136】没有上下的方向或三维空间可言；同时也根本没有想像力来想像三维空间的存在.这个国家很严格地分成许多等级.最低下的一层是妇女,她们只是一条直线,像一根针一样,眼睛长在线头上.妇女们的眼睛发光可见，可是另一端完全什么都没有，故而只要一转身就完全看不见了.平面国里的男士们如果不当心接触了妇女的后端，这种不当心的碰撞可能致命.为了避免如此的意外，法律便规妇女们一定要时时都摆来摆去，让其他的人看到她们.所以那些嫁给比她们高一级男人的妇女,摇摆起来就‘颇有韵致’;甚至有‘招蜂引蝶’之嫌.低级的妇女模仿她们实在是‘东施笑颦’;摆过来摆过去毫无可取了！

军人和工人是等腰三角形.底边极短，所以顶角十分锋利.中

产阶级人士是等边三角形.职业人士是正方形或正五边形.高级人士从正六角形开始，阶级愈高则边数愈多，有些和圆都分不清楚.平面国里的政府首领和教会人士都是圆.

这位方正先生有一晚梦见他到了线条国.那是一个空间只有一维的国度.方正先生无法说服当地的国王有二维空间的存在.接着一位来自太空国①的客人拜访这位方正先生——这位太空客是一个圆球.他竟然可以把方正先生从平面国的平面上提起身来，让他俯视自己的五角形住所，想借此显示三维空间的神秘给方正先生.方正先生梦醒之后回到平面国，向人传布三维空间的福音.大家以为他神经失常，把他关进监狱.故事也到此为止.

圆球来到平面国时是从地平面冉冉上升而出现，直到其横截面的面积为最大时才停止上升.当然这个横截面是一个正圆.圆的半径也是球的半径.如果是一个立方体而不是圆球来到平面国，当它出现到横截面面积最大时，面积有多大呢？这个立方体出现时很可能是斜着向上升.

另一本讨论二维空间的幻想小说篇幅比阿宝的著作大得多.作者叫查尔斯·霍华德·欣登,书名叫《平面国趣事集》②,全书共有181页,1907年出版于英国伦敦.这位欣登先生的父亲是伦敦有名的耳科医生詹姆士·欣登③,他是英国女作家乔治·艾略特④的好朋友,出版过好几本书,其中之一是《病痛的神秘》⑤,其他的书也都有很多的读者.小欣登年轻时在牛津攻读数学，娶了布尔先生⑥的五个女儿之一.小欣登后来移居美国并在普林斯顿大学和明尼苏

① 线条国是 Lineland,太空国是 Spaceland.
② *An Episode of Flatland*, by Charles Howard Hinton.
③ James Hinton.
④ George Eliot.
⑤ *The Mystery of Pain*.
⑥ George Boole，逻辑学家，布尔代数创始人，现代计算机的始祖之一.——译注

达大学教数学且兼任美国专利局的验证官,1907 年身故.

有贵族血统的贝尔吉斯先生①在 1907 年 5 月 5 日的纽约《太阳报》上为他写了一篇相当长的讣文，叙述他自己有一次和欣登先生一同看足球时，有一位陌生人想从他的衣襟上的小口袋里拿走他戴的菊花，欣登先生一气之下，将这位仁兄整个人举起来抛到篱笆外面.1897 年欣登的名字又出现在报纸上，因为他发明了棒球的自动投球机（详情请参阅 1897 年 3 月 20 日的哈泼周刊②,用火药包来投掷棒球,而且速度和曲线都可以自动调整.普林斯登大学队曾用它来练过几次球,发生了几次意外之后,球员都避而远之. 【138】

欣登最为人所知的是他所写的一些有关四维空间的书和论文.他不断地致力于制造四维空间结构体的模型（即这些四维空间结构物在三维空间内的截面③）.他用好几百块积木似的小立方体,注上号码,涂上不同的颜色来做不同的模型,并且在他最重要的两本书中详加介绍.这两本书的书名是《谈四维空间》和《谈新思想时代》④.他在这些小方块上花了好几年的功夫之后声称他己学会了如何在四维空间中思考.他把这些心得教授给他 18 岁的小姨妹阿丽西亚⑤.他的姨妹并没有受过正式的数学教育，可是后来却有了令人惊奇的掌握四维空间的能力，并在这个题目上有相当重要的成就.(加拿大著名几何学家考克斯特所著的《正多面体》,⑥的 258—259 页,对她的生涯有特别的介绍.)她的儿子叫塞巴斯第安，

① Gelett Burgess.

② *Harper's Weekly*.

③现代数学中讲到截面时，不一定是指面，而是指公共点的集合.所以这里的截面是三维的.—— 译注

④ *The Fourth Dimension* and *A New Era of Thought*.

⑤ Alicia Boole

⑥ *Regular Polytopes* by H. S. M. Coxeter.

儿媳妇叫卡美丽塔①．两人合办了一所学校，由她任该校校长，直到退休为止．

欣登先生将他所构想的平面国称为奥斯垂亚②．他所用的手法比阿宝先生的更为别出心裁在这个平面国里的居民，不像阿宝的平面国的居民可以自由自在地在一个广阔的平面上移来移去．欣登先生竟然将这些居民沿着一个大圆的边缘站着．各位如果假想一个平桌面上放了一些大小不同的硬币，彼此间转来转去，便不难想像在它们之间放一个较大的硬币，好似一个平的大太阳，而那些小的硬币就像行星般地绕着太阳转．万有引力的效应和我们的宇宙一样，只不过因为是在平面上，引力的强弱不和距离的平方成反比，而直接和距离本身成反比．

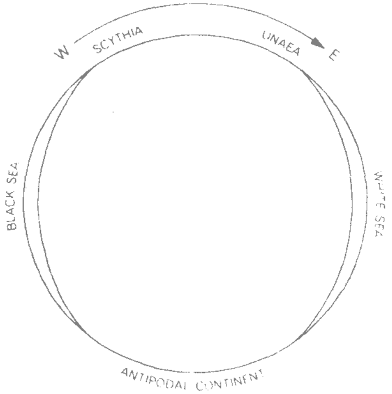


图 65　查尔斯·欣登的二维平面国——奥斯垂亚

奥斯垂亚这个行星如图 65 所示．它的旋转方向（见图中的箭头）称之为东，反方向则称之为西．这里没有南北，只有上下．奥斯垂亚人的生理结构比较复杂．在这里欣登先生不谈生理结构的细节，而仅仅说明这里的居民是用直角三角形来表示,如图 66 所示．他们和阿宝平面国的居民一样，每个人也只有一只眼睛（显然，这两位著者都没有考虑用一双眼睛的可能性，或者两个一维单向的视网膜合用之下便会成为二维视觉）．他们不像阿宝平面国的居民,因为他们有手脚．两人相遇时不会擦肩而过，一定要一人从另

① Sebastian 和 Carmelita.

② Astria.

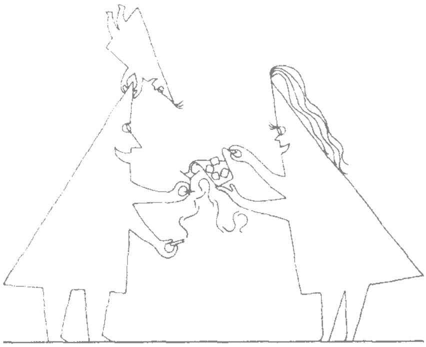


图 66 奥斯垂亚国中的日常生活

一人上面爬过去或从底下穿过去，好像马戏团里相遇在高架钢索上的两个演员那样．所有奥斯垂亚的男人一生下来就朝东，妇女们一生下来就朝西，直到老死为止．因为他们全部都不会翻身成为镜像，所以要朝后看不得不弯下身来用头着地倒着看．再不然就是用镜子．用镜子当然方便得多，所以他们的居所以及其他的建筑物中都装有很多的镜子．可是做父亲的要亲亲他的儿子时，先要把儿子倒抱起来．

奥斯垂亚国有人居住的地方原来分为两个区域，一个是较为文明的乌尼安族，它在东部；另一个是比较野蛮的新锡安族①，它在西部．打起仗来新锡安人占便宜，因为他们的男性战士是从后面向乌尼安人进攻，而乌尼安人必须向后打才能还手．向后打当然不太顺手，因此之故，新锡安人一直把乌尼安人向东追到白海海边一片小小的土地上聊以求生．【140】

幸好此时科学开始发达，乌尼安族才免于完全被消灭．族中有一些天文学家在观察日蚀和月蚀以及其他自然现象之后得到了一个结论，那就是他们所居住的行星是圆的．同时从潮水的起落，他

① 乌尼安一Unaeans，新锡安一Scythians

们知道白海的另一边是一片遥遥相对的大陆.因此他们就选出一些乌尼安人，经过百年长征越过白海到新大陆去.路上所有的树，爬不过去就得砍下来全族的大大小小都接受考验开始造船，以便越过黑海进攻新锡安人.新锡安人突然被乌尼安人从后面攻击，大为吃惊,几乎完全崩溃.正好他们终于同意组织全圆政府而有了和平.这就是本书罗曼史开始之前的历史背景.

书中讲述的是二维空间的流行故事.其细节暂且略而不谈，因为它和早期的空想社会主义十分相似，总是一个有计划造福全社会的正义人士攻击寡头财阀.这恋爱故事的女主角叫劳娜，她父亲是有钱有势的国务卿.追求她的人叫瓦耳，当然是一位平淡无奇的劳工阶级.故事的主要情节是在叙述一个即将来临的大天灾.另一个名叫阿尔底亚的行星渐渐逼近奥斯垂亚，接近的后果是奥斯垂亚的运行轨道即将改变成离心率很大的极长的椭圆形.如果这样的话，该行星的气候将有改变，变成极冷或极热，所有的生物皆难以生存.所以政府开始大规模地进行避灾活动.例如挖掘很深的地下室，同时开始储存粮食以供上层阶级人士之用.

这个不幸的灾难全靠劳娜的舅舅米勒先生研究所得的数学定理而得到挽救.他是一位习性奇怪的单身汉，住在孤山.这位米勒先生（其实就是欣登先生的化身）是该行星上唯一相信有所谓三维空间存在的人.他认为所有的有生物或无生物都在第三坐标方向有小小的厚度.这个厚度也在被他称之为“相仿的世界”里的相同的光滑平面上四下移动.他利用自己做的各种模型使自己对这种三维空间有了一种感觉和领悟，而且懂得自己其实只不过是一个三维空间里的人移动着自己在二维空间中的身体而已.

【141】 “相仿的世界在自己的两侧都向着极深邃处无穷地延伸,’米勒先生以流利的言词对奥斯垂亚的领袖们说，“领悟到这一点之

后……当你们再向太空仰视时，除了碧蓝的苍穹之外,便会有了多一层的神秘感.你的视线无论投射到多么深远之处，都是沿着一个你毫不了解的方向滑向一个延伸到深处的存在.

“知道这一点,太空带来的神奇感固然与昔时相同,但是我们知道各个星座并非只是相同事物的无限重复而已.你可能突然有一个非常美妙的领悟，领悟到还有其他的事物存在——我们以前对美妙的太空只能在梦中想到它们.只要我们能知道在一切可见事物的两侧还有什么东西存在，我们就能领悟到它.这是多么好!”

“如果我们有什么机械工具能接触到相仿的世界的表面或者把它锁上,那么岂不是可以改变奥斯垂亚的行程,避免与这向它逼近的行星碰撞或消去它会带来的影响吗？可惜如此的方法不存在.不过既然我们实际上是生活在三维空间里，这空间或许有可借助之力.”这位米勒先生便倡导一项动员所有的群众的运动.这个运动如今且称之为心理动力学,或简称为‘心动学”.那就是靠思想的力量来移动物体.这次运动得到很大的成功.靠全体人民运行心动学将奥斯垂亚的轨道略加改变而避免了这次灾难；同时因为有了三维空间的新知识,科学也大有进步.

二维空间里的物理原理是什么，以及可能会存在什么样的工具,做这方面的推测的确是相当有趣的.欣登先生在他另一篇文章“谈平面世界’①里，就推测说奥斯垂亚平面国中的房屋不能够有两个出口.如果前门是开的,后门便得关上,或者窗户要关上,不然房子便会塌.

在这个国家里，管子或任何通道是不可能存在的.因为没有方法将它们的边连在一起而且又保持管道通畅.在这里绳子是不能打结的（绳子只能在三维空间内打结，圆球面只能在四维空间

① *A Plane World*.

内打结，超立体的表面只能在五维空间内打结，这已经有了严格的证明）. 钩子、杠杆、接头、钳子、钟摆都可以使用，还有楔子或【142】斜面. 有车轴的轮子是不存在的. 一种很原始的齿轮转动系统是可能的，只要把齿轮的一部分用铁丝包起来，使它有一个弯曲的边缘. 划船的方法可能被设计出来；飞机要像鸟类一样鼓翅而飞；平板鱼游水应该没有问题，不过鱼翅的形状要特别设计；酒可以装在瓶里，也可以倒入酒杯，不过喝起来一定"平"淡无味. 重的东西可以架在圆圈上面滚动，正好像三维空间里用圆柱推运东西一样.

讲起奥斯垂亚国用圆圈来运东西，有一位卡哈莫尔先生①告诉我一个有趣的小问题. 在图 67 中有一辆奥斯垂亚的平底货车，车身长 30 英尺，在三个圆圈的支撑下沿一条笔直的轨道移动. 每一个圆圈从圆心到圆心的距离保持为 10 英尺. 当货车行驶到图中所示的地方时，一个奥斯垂亚人便得马上把最后一个轮子举起来抛给前面的另一个工人，他就马上将这个圆圈摆在图中虚线圆所示的地方. 之后货车又被推着在三个圆圈上滚行，直到相同的情况再度发生. 最后的圆圈又被拿出来，照刚刚描述的方法向前抛. 这个方法要一直不停地重复下去.

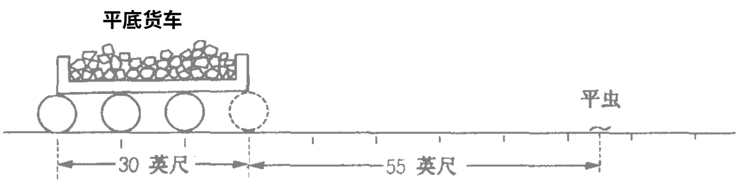


图 67　有多少轮子将辗过平虫？

货车就这样向右推. 一直被推到看不见为止. 正好在距离虚线圆 55 英尺的地方有一条平虫. 假如这条虫不会动，请问有几个轮

① Allan B. Calhamer

子辗过它？

有兴趣解这个问题的读者先请用心算，有了答案之后再用纸笔画图来验证，最后才和本章后面的答案相对照.如果读者愿意做【143】一点‘家庭作业”,也可以将这个问题推广.货车下面等距离的圆圈不一定仅限于 3 个.假如是 n 的话，答案又将如何？奇怪的是轮子的大小没有关系.

增注

在讨论平面国时我曾提到在那里隧道是不可能存在的.这个说法并不是百分之百的正确.罗伯特先生①来信说在平面国,地道的房顶上可以开好几个窗口.铰链全装在上面.平面国的人通地道时,先开一扇窗,其他的窗口仍然关着.下来之后再将窗关上.不过要设计一套设备，不可以在任何时间窗口全打开.

都瑞尔先生②写过一本《数学探险记》③,书中第 12 章的标题是‘四维空间:一幅高效率的画面”.这一章里颇有兴味地讨论“薄皮国’④里人的生活情况，和欣登先生的平面国大同小异.这里的人有两个眼睛,一个长在额头上,一个长在下巴上,因此有双目视觉.他们的颈子细长，可以弯下头来向后看或朝上看.当薄皮国的男士和妇女相逢时，男士们要躺在地上，让女士们从他们身上踩过去.

这些平面国的居民们除了某些机械工具的制造和使用有问题之外，他们的头脑的设计也有片面性的限制，只能用二维的网络.我们都知道三维空间里的动物的脑神经系统交错纷杂.神经纤维

① Gregory Robert.

② Fletcher Durell.

③ *Mathematical Adventures*, 1938 年初版,波士顿 Humphries 出版社印行.

④ Thinland.

的构造是十分复杂的，构成一个三维网络.在平面国里，因为神经系统不能自相交叉，无法形成一座立体式的架构.其实这个困难并不如想像中的那样不可克服.我们可以假想这种有交叉的神经网络中，脉冲通过时不准许转弯才能送到另一点.

1964 年 12月 3 日出版的《新科学家周刊》①上有一篇格雷吉曼先生②的专文,题目叫"赞扬布尔先生"③.这里面谈起布尔先生【144】的夫人和他的五位女儿.他的夫人叫玛丽,在他去世六十年后仍然不停地写文章到处宣讲布尔的各种思想.格雷吉曼先生说:"其内容包括神学方面的或伦理学方面的种种看法.尤其是代数中的零和无穷大两个符号，她几乎是拜为神明.直到 1909 年她还出了了一本书,叫做《代数的哲学和乐趣》④,书中说如果要和'未知'建立正确关系，就要根据布尔原理来创造自己的代数."

欣登和布尔的大女儿玛丽生的儿子即布尔的外孙叫豪德，是英国一位有名的昆虫学家.欣登有两个孙辈,一个叫威廉,另一个是他的妹妹佐安，一位物理学家.他们的故事曾刊登在 1954 年 8 月 9 号的《时代周刊》上,两人都是红色中国的热情支持者.布尔的二女儿叫玛格丽特，她的儿子叫泰勒⑤,他是剑桥大学的数学家.布尔的三女儿阿里西亚，前文中已略有介绍他的四女儿叫露西，是大学医院里的一位化学教授.布尔最小的女儿叫莉莲，嫁给一位波兰的流亡科学家伏尼契⑥，年轻时写了一本激烈反对天主教并涉及意大利政治革命的小说,书名叫《牛虻》⑦.这本书在苏联相当

① *The New Scientist*.
② Norman Gridgeman.
③ *In Praise of Boole*,新科学家周刊 420 号,655—57 页
④ *The Philosophy & Fun of Algebra*.
⑤ Geoffrey Taylor.
⑥ Wilfreed Voynich.
⑦ *Gadfly*.

畅销，后来在中国也十分流行. 第一次世界大战结束后，伏尼契一家从伦敦搬到纽约. 莉莲 1960 年去世,终年九十六岁.“现代的苏联人一直很惊讶于——”格雷吉曼说,“西方国家的人竟然大都连听都没听说过莉莲这位伟大的英国女作家.”

答案

一个立方体冉冉上升以获得最大的截面积，其答案如图 68 所示. 图中阴影部分的长方形面积是 $\sqrt{2}$,即 1.41…（这个问题最早由阿吉维①先生提出，然后由海德先生②解答,都刊登在 1965 年的《美国数学》月刊上）. 立方体的截面也可以切成一个正六方形，但是这六边形的面积只有 1.29….

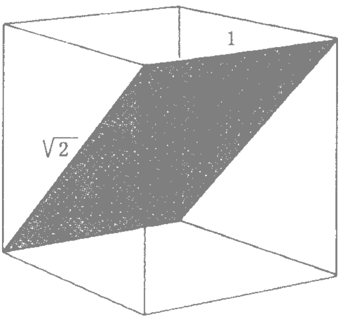


图 68　立方体问题的答案

平底货车的答案是：只有一个圆圈辗过这条平虫. 如果货车下共有 n 个圆圈,而且 n 是偶数，彼此之间的距离相等，这条平虫放在轨道上任何一处（除非正好摆在一个圆圈下面，那么共有 $\frac{n}{2}$ 个圆圈辗过这条平虫. 假定 n 是奇数,情形稍为复杂一点. 求解时要把货车前面一个圆圈前方的轨道照圆圈间的距离一段段等分画出来. 同时将这些间隔用 1, 2, 3 等数字注明. 平虫如果分在奇数的间格里,则有 $\frac{n+1}{2}$ 个圆圈辗过；如果是放在偶数的间格里，答案为 $\frac{n-1}{2}$. 这条平虫也不可以正好放在圆圈和轨道的交点上，正如数

① Stanley Ogivy.

② Alan R. Hyde.

学家们所说的,这个“边界条件”不在考虑之内.

值得注意的是，货车与平面的相对速度是圆圈滚动速度的两倍.故而圆圈走了 x 路程后，货车则行驶了 $2x$ 的路程.这情形和【146】电梯门的运动一样，有一扇门的速度比另一扇快一倍①.

①这里的电梯门应该像公共汽车双扇滑动门.——译注

第 13 章
魔术师年会记趣

每年夏天，通常是在七月份，几千名美国魔术师兄弟会会员总在中西部的某一家大旅馆里开一次假想年会. 今年是在芝加哥的喜而满大旅馆召开. 三天三夜里，整个旅馆的大小厅房，不是洗牌的声音就是硬币的叮叮当当声，喧哗通天. 玩绳戏的白鸽子一只只地飞起，或是鸟笼失踪，甚至有一两位大美人冉冉地升空而起.

魔术是我主要的嗜好. 所以我也参加这次假想聚会，同时也想为我的《科学美国人》月刊中的专栏找资料. 好多数学家是业余的魔术师,同时也有许多魔术师对数学感兴趣,结果就建立起了“数学魔术”①. 它是娱乐数学中一个多姿多彩的分支.

旅馆的大厅和客房之间的夹层厅有二十几家专做魔术道具生意的商家摆下了摊子，展览他们经手的玩意儿. 我就在一位被人称

① Mathemagic.

之为大贾斯伯（他是芝加哥魔术经纪人，也用这个名字上台表演）【147】的摊子前停下来，看他表演同行们所谓的“滚环链”. 他用 30 个小铁环串在一起，串连的方法如图 69 所示 .玩这把戏的时候，先用左手拿着链子上最上面的一个单环，下面是一个双环 .再用右手的拇指和食指捏住右边那个小环的后面 .(见图)这时，左手一放，便会看见本来左手捏住的单环，沿着整个链子一直滚到最下面 . 接下去玩时，右手捏住的小环变成最上面的一环 .就用左手捏住下面双环里左边的一个，同时要捏住小环的前面.此时将右手一松，右手捏住的环又和刚刚一样一直滚下去 .

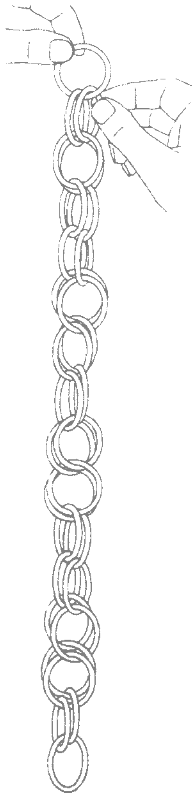


图 69　滚环链

“你看，是不是每个读者都能做出这么一条环链 ?”我问道 .

“当然可以，”贾斯伯说，“他们可以到杂货店去买 30 个挂钥匙的小环,用大拇指的指甲将每个小环撬开连在一起，大约二十分钟就可以做好 .不过请你不要告诉别人说是我泄漏这个秘密 .”

贾斯伯讲的一点都不错 .钥匙环非常合适 .如果怕把指甲弄伤,可以用指甲刀,撬开一条之后将另一个小环卡进去.做的时候最好把正在做的链子挂在一个钉子上,然后将一个个的小环加上去,直到做成图 69 的样子 .只要没有做错，滚下去的小环，不但相当顺利，【148】而且叮叮当当的声音也颇为悦耳 .

当我和贾斯伯聊个不停的时候走来了乞里先生①，他是哈特

① Fitch Cheney of University of Hartford.

福大学的一位数学家."看上去你对连接在一起的把戏有兴趣,'他对我说;'我发明了一个新玩意,说不定你的读者们会喜欢."

乞里先生从口袋里拿出一条软软的长绳子，叫我和贾斯伯一人拿一头，然后用另外那只空手的食指勾着绳子，如图 70 所示.此

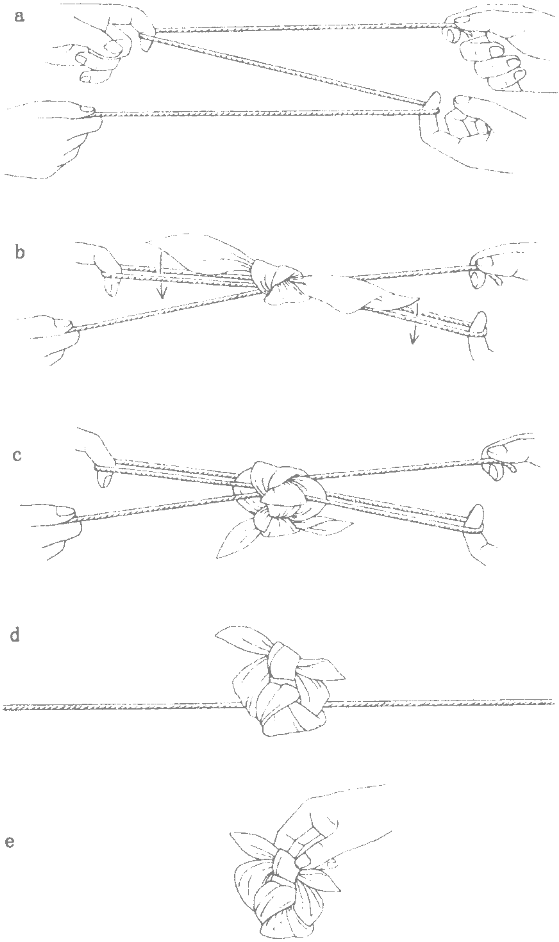


图 70 乞里先生的'绳一帕'戏法的表演过程

时乞里先生在绳子的中央用手帕打一个结，并且将手帕的顶端向下转(图 70之 b) ,再打两个单结(图 70 之 c).

“请将食指所勾住的绳子放开,”乞里说;“同时再将绳子拉直.”我们照他的话做,如图 70 之 d 所示. 乞里将绳子上打的结朝上转 180 度。

“你们看怪不怪，”他说，“刚刚这手帕是绕着绳子打的结，而且结打得很紧.如今这打了结的手帕却跑到绳子外面去了.”他一面说一面把手帕上的结向上一提，这个结便从绳子上拿开了，如图 70 之 e 所示.各位若照上述的方法再做一遍，效果必是一样.

晚宴开始之前，酒吧间里充满了喧哗的魔术师们.在那里我碰到我的老友,绰号叫‘赌你五分钱’的尼克先生.他是拉斯维加斯某赌场的赌台主持人.有关玩牌方面的新戏法他都相当清楚.他有一个习惯,不论谈到什么事情,他总爱说‘赌你五分钱”.虽然大家都知道他打赌时总有你想不到的暗门手法，可是谁在乎五分钱！买个新鲜总是值得的.

“有没有什么新鲜玩意好赌,尼克?”我问道;“特别是机会均等的玩意儿.”

尼克把一个一角的硬币向啤酒杯旁边砰地一丢，然后说：“如果我将这一毛钱从离开台面几英寸的地方丢下来，有一半的机会它是正面朝上,另一半的机会是反面朝上,对不对?”

“对,”我说.

“赌你五分钱！这一毛钱会直直地站在桌上.”

“一言为定!”我说.

尼克拿起这一毛钱硬币，在酒杯里泡一下，然后贴着酒杯的边才放手.由于啤酒的一点点粘性，硬币沿着酒杯滑下去之后就直直地站在桌面上.我拿出一个五分硬币给了尼克.附近的人都哄堂大笑.

尼克又从火柴卡里撕下一根纸做的火柴，并且用铅笔在火柴

的一面做了个记号."假如我将火柴朝台子上一丢,有记号的这一面有一半的机会向上,对吧?"我点点头.【150】

"赌你五分钱,"他接着说,"这火柴也会像刚刚那一毛钱硬币一样,以火柴的边落下而且站着不动."

"好,赌定了,"我说.

尼克将火柴朝台上一放.不过在他放之前,先将火柴打了一个V字形的折.火柴当然是站在火柴边上,一动也不动.我又输了五分钱.

这时有人从口袋里拿出一个塑料做的小陀螺:"你们看见过他们卖的这个会翻身的陀螺吗?我也赌你五分钱,你转一下这个陀螺它会翻个身站在陀螺柄上转."

"我不赌,"尼克说,"我自己也买了个翻身陀螺,不过我倒有个主意.你先将这陀螺以顺时针方向转,我再赌你五分钱,当他翻了身之后,你就说不出来是朝什么方向转了!"

手上拿着陀螺的人撅着嘴自言自语地说道:"让我来想想.它先朝顺时针方向转,翻过身之后,应该仍然朝同一方向转.因为它不可能停下来再换个方向转.不过,既然翻了个身,那么从上面朝下看的话,陀螺转的方向也要翻个身.也就是说,翻了身之后,陀螺的转向是反时针方向!"

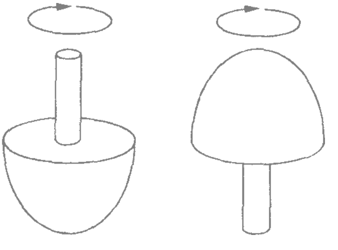


图 71　翻身陀螺先绕顺时针方向转(左图),翻身后仍然绕顺时针方向转(右图)

说着说着,他就用力地让陀螺顺时针方向一转.不久,这陀螺便翻了个身,大家都大吃一惊,再朝下看陀螺仍然是朝顺时针方向转,大家都非常奇怪.(见图 71)各位不妨买一个这种会翻身的陀螺(听说到处都买得到)来证实以上所叙述的事实.基本粒子物理学家可以这样说:这陀螺翻身以后,其手性就发生了变化,变成了自己的镜像而

成了一个“反陀螺”.

晚宴和其他娱乐节目结束之后，与会的人便各自形成一些小组回到房间,互换秘闻,讨论魔术或吹牛去了.我所参加的小组正好在讨论数学魔术.我的加拿大朋友史多维尔先生①解说如何用数学上的二进制来玩一些纸牌把戏，尤其是那种追踪观众所选的牌的把戏.

【151】

有许多挑牌的技巧是这样玩的.当观众选好牌之后，表演者将一小叠牌交给观众.请他们先将最上面的一张放到最底下，然后将下一张牌发到桌面上.然后又将最上面的一张放到最底下，再将下一张牌发到桌面上，一直到手上只有一张牌为止.翻过来一看，正是观众所选的那一张.问题是，当表演者将观众所选的牌放回牌叠里去时，要放在哪里才会正好是最后一张呢？而且这一叠牌的张数有变化时，放回这张牌的位置也在变.如果一面猜一面表演，岂不又费时又会出错.史维多尔先生说答案可以在二进制中找到.

以下是他的方法.第一步是将那一叠牌的张数用二进制写出来，然后将这个二进制数的第一位数字移到该数的最后面.如此所得到的新数再转变为十进制，这就是选出来的牌该放的位置.例如我们用整副 52 张牌,将 52 用二进制写是 110100,把第一位数字移到最后面,变成 10101.这个二进制的新数就是十进制中的 41,所以选出的牌要放在从上面数起数到第 41 的位置.

这一叠牌最少要有多少张才能使最上面一张牌恰好是剩下的最后一张呢？最上面一张牌，在二进制里就是 1.故而这叠牌的张数用二进制来写应该是 10,100,1000,10000…等等.（也就是十进制中的 2,4,8,16…）如果要求剩下来的恰好是最下面一张牌，这叠牌的张数应该是二进制中的 11,111,1111,11111…(即十进制中

① Mel Stover.

的 3, 7, 15, 31…)

能不能使这叠牌中的第二张成为最后剩下的牌呢？这是不可能的. 实际上这叠牌里任何一张在偶数位置的牌都不能是最后剩下来的一张. 因为这张牌的位置以二进制来表示时，其结尾必须是 1(因为这数的第一位是二进制中的一个 1,当它被移到结尾时,此数的结尾便变成了一个 1). 二进制的数凡是以 1 结尾的,必定是十进制中的奇数.

作者的另一本潇洒数学小品集锦①介绍过一位厄根先生②. 他是玩纸牌游戏的专家. 现在由他来现身说法,介绍一种与信息编【152】码有关的纸牌游戏. 他玩的是下面这个戏法."首先我要将要玩的游戏说清楚,"他说道,"任何一位可以用他自己带来的牌,洗几遍之后,任意挑出 5 张. 在这 5 张牌里他必须选出 1 张，剩下来的 4 张要按我规定的方法排列，然后放在一个信封里. 牌面朝下,并且请那位选牌的先生将这个信封送到我的房间去. 我太太在房间里，她是玩这个游戏的助手. 这位送牌的先生到我房间时，先敲门三声,然后从门缝里将信封送进去. 任何人都不可以讲一句话. 我太太看了这 4 张牌之后,就会讲出来被选的牌是什么牌."

我自愿做送牌的人，便照厄根先生所讲述的步骤一步步进行. 我从自己带的一副牌里拿出了 5 张，并且选了一张黑桃 6. 厄根先生连这张牌碰都没有碰，因为他不要让任何人怀疑他会找机会做记号,或是做夹带. 很多的牌其背面若上下颠倒，总有极微小的差别,尤其是背面朝上时,赌场老千便看得出魔术师所谓的'单向背面'. 利用这一点便可以传递信息. 例如把有些牌指向这一边，另外一些牌指向另一边等等. 同时将这些牌放进盒子里时也会有花样传递信息. 例如牌面是朝上还是朝下；信封、盒子或包裹加不加封

① *New Mathematical Diversions from Scientific American*, 1966 年初版.

② Victor Eigen.

条等等.甚至所选用的盒子或者不用盒子等等，都可能在暗中递消息.如果送牌的人是厄根先生自己，这也可能是一种暗号.其他诸如头发的颜色，结了婚的或未婚者，以及姓氏的笔划等等.他太太更可以端详这位送牌者.但是厄根事先已经把他所用的步骤讲得如此明白，再加上他连牌碰都不碰，这种作弊的可能性便全部不存在了.

我就照厄根先生的指示将4张牌排好，问了他的房间号码之【153】后便要起身去送牌.这时史多维尔先生开腔了."等一等,"他说，"我们怎么知道厄根先生会不会在送牌的时间上玩花腔？他说了这么多话,让你迟了好些时间才送牌,这会不会是暗号呢？"

厄根摇摇头,同时说":时间没有关系,假如你高兴,可以让加德纳先生再等一下，直到他觉得可以去的时候再去."

我们一共等了十五分钟，其间我们惊奇地观看另一位芝加哥的纸牌大师马罗先生①趁空表演如何经过八次"法若洗牌法"②使整副牌又回到原来的顺序.这种'法若洗牌法'在英国称之为'交织洗牌法'③.将一副牌分成两半，每一半为26张.洗牌时使两个半副牌的每一张交错排置.如果第一张先洗出的牌是下半叠牌的最下面一张,则称之为'下织法'如果第一张先洗出的牌是上半叠牌的最下面一张,则称之为'上织法".8次'上织法'或是52次'下织法'就可以将一副牌洗回到原来的顺序.只有个中能手或赌场老千才能熟练地使用这种洗牌法而且不会出错.近年来好些人用二进法来分析这种'法若洗牌法".有些发表在数学刊物上，有些发表在魔术刊物上.马罗先生就写了两本书介绍这种洗牌法，以及以这种洗牌法为基础而做的数学游戏.

① Ed Marlo.

② Faro Shuffle.

③ Weave Shuffle.

马罗先生表演完之后,我就将那 4 张牌送到厄根先生的房门口. 敲了三次门再把牌从门缝里塞进去. 我听到脚步声，也听到 4 张牌被抽出来的声音. 不久,厄根太太说道:"你选的是黑桃 6!"

厄根先生是如何将这个信息传递给她的？

增注

"滚环链"起源何时何处，我一直无法考稽. 阿伯拉罕先生①所写的《冬夜自娱集》②一书于 1952 年在英国出版时就已经提到这个戏法. 可见其渊源一定更早. 有时,铁环有两种颜色,故而当你【154】将红色小环放下时，你会清清楚楚地看见红色小环向下一直滚到底. 表演者在开始前先在一只手里拿一个红色小环，另一只手里拿绿色小环. 当小环朝下滚时,假装去接它,远远地看过去,真好像不同颜色的小环各自会滚到手掌心似的.

有一位白瑞特先生③提供一个方法来做铁环链. 一开始先做一条简单的 1—2—1—1 的环链. 然后将最下面的单环和最上面的配在一起，倒过来之后变成 1—2—2. 现在再加上两个单环在下面,做成 1—2—2　1—1. 接着，又把最后一环和最上面的一环配成双. 一步步地做下去,便得到所需要的环链了.

这儿有几篇文章是讨论翻身陀螺的④⑤⑥.

① R. M. Abraham.

② *Winter Nights Entertainments*.

③ E. A. Brecht.

④ C. M. Braams:"*The Symmetrical Spherical Top*",刊载于 1952 年 7 月 5 日的 *Nature* 周刊.

⑤ C. M. Rraams:"*The Tippe Top*",刊载于 1954 年第 22 卷 *AmericanJournal of Physics*

⑥ John B. Hart:"*Angular Momentum and Tippe Top*",刊载于 1959 年 3 月份的 *American Journal of Physics*.

利用二进制决定如何将一张选定的牌放进有 n 张牌的一叠牌中间（玩的时候，先移一张牌到最底下，发一张牌到桌上，直到手中只有一张牌时，正好就是预先选定的牌）.我所介绍的这个戏法早在 1950 年就见载于当年 8 月 19 号的《美国数学月刊》，作者是孟德尔森先生①.其实，在这以前，好些魔术家便已经知道一种等价的方法：先算出比 n 小但与 n 最接近的 2 的高次方.将这个数从 n 中减去，所得的差乘上 2 便是放牌的位置.不过用这个方法时要先把第一张牌发到桌上，然后再将余下最上面的牌移到最下面.如果要先移牌后发牌，那么上法所得的数要加 1.（如果 n 正好是 2 的高次方，所选的牌就放在最上面，这是先移牌后发牌，如果是先发牌后移牌，则所选的牌要放在最下面.）

据我所知，最早有一位胡莫尔先生②写过一篇短短的戏法指南,名叫《伟大的发现》③,发行者是坎特魔术店,那是在 1939 年.这里面便谈到如何用二进制来玩纸牌戏法从此之后，至少有好几十种不同的巧妙纸牌指南被发表，都是应用这个原则，直到如今仍155】然不断.纸牌博弈名家史卡尼在 1950 年就印了一本小册子，名叫《史卡尼四重奏》④，就介绍了四种以二进制为基本原理的纸牌戏法.后来这个小册子被搜罗在依里奥特先生⑤的《最佳魔术选》⑥书中.下面让我们来介绍这四重奏中间的一段，以表现魔术师手法的巧妙.

一副牌洗好之后交在你手上，像扇面一样展开，让你看到各张

① Nathan Mendelsohn.

② Bob Hummer.

③ *The Great Discovery*.

④ *Scarne's Quartette*.

⑤ Bruce Elliott.

⑥ *The Best in Magic*.

牌的点数.然后你宣布说，你要预先选一张牌而最后这张预先选定的牌会再出现.说时你也看一看最上面的一张牌，将它的花色和点数写在一张小纸上.不要让任何人看到你写的是什么.假定它是红心2.

此后将所有牌的牌面朝下放在你的左手上，并且叫观众给你一个从1到52之间的任何一个数字,最好是大于10,玩起来效果会好些.假如这位观众所选的数是23,先用心算将23中减去够减的2的高次方.当然在我们这个例子里这个数应该是16.23减去16之后剩7.7乘2是14,那么你现在要做的工作是选出23张牌作成一叠,同时将红心2放在这一叠的第14张.做法如下：用右手将左手上的一副牌一张一张依次发到右手上堆成另一叠.这将使原来那副牌的顺序颠倒过来了.数到14时,你右手上已经有了14张牌,于是你停下来并且问道"你们刚刚选的是什么数?"(好像你真的是忘掉似的)当观众回答说是23时,你再点点头说道"对了,是23"同时你又重新再数牌.不过这一次数的方法不一样，是用左手将那副牌向右滑，并放在右手那14张牌的下面,所以当你从15继续数到23时,你的右手已经有了23张牌,而且那张红心2正好是在这叠牌里的第14张.你数牌的过程被你暂停,假装问问题,然后重新再数,打了岔就分成前后两段.这前后两段数牌的方法虽然不相同，但观众们大概也不会注意到.把你右手的23张牌交给任何一位观众，同时给他的指示是，先发一张牌到桌上，第二张牌移到最下面，如此交替运作，直到手上只剩一张牌时，便将预先写好的纸条交给他，上面所写的花色和点数当然是红心2.

1962年，席瓦兹先生①发表了下面这个把戏.这里我稍稍地加以简化.从一副牌中取出4,8,16或32张牌.假定我们取了16张.转过身后，请观众再从剩下的牌中取出几张（必须少于16张）[156]

① Sam Schwartz of New York City.

拿在手里而且不要让我知道一共是拿了几张.且假定观众拿走了n张.此时将我手中的16张展开成扇面，让观众看见牌的花色和点数，叫他们记住从最上面一张牌数起，数到第n张,只不过不要告诉我n是什么数,也不要告诉我第n张是什么牌.现在先把我的牌合拢起来，再请观众将他们拿的那些牌放在我的牌的上面.这么一放，他们选的那张牌正好是在($16+n$)张牌中的第$2n$张的位置.这时,将这些牌交给观众,请他们先发一张到桌上,将余下的牌的最上面一张放到最下面.如此发牌、移牌,交互地做下去,当他手上只剩一张牌时，翻过来一看，正是他们所选的那一张席瓦兹先生做这个戏法时耍了一点花枪.他先把这一叠牌放在自己的背后并声称要略加安排使观众所选的那张牌跑到某个位置去.其实他不过说说而已.在他的身后，牌的顺序根本没有更改.在他的通信中他写道，加上这么一点花枪，结果一定如以上所述，只不过不要让观众知道.

吴尔先生①是一位化学家，曾以“拉维里”为假名发表了好些颇有创意的数学游戏，大都相当精致微妙.他特别授权给我在这里介绍一个尚未公开发表的纸牌游戏.它和席瓦兹先生的戏法大同小异，而且两人是在差不多前后的时间里彼此独立地创造出来的.从一副牌中取出2的n次方张牌,假定是32张.请某一位观众把这32张牌洗几遍.同时请他心里想一个1到15之间的数.表演者转过身去之后，这位观众便将心中所想的牌数放进自己的口袋里.表演者拿走剩下来的牌，一张张面朝下发下去，砌成一叠.发的时候让大家看到牌面.这位观众也由此看到与他心中所想之数相同数的那张牌.牌全发完后（也就是整副牌的顺序颠倒了一遍）便交给第二个观众,并且叫他做先移牌再发牌的老套.直到手上只剩一张时,正是他们所选的那张.

① Ronand Wohl of Rutgers University

基本是同样的把戏还有另一个玩法.这是纽约的惠贝克先生①所提供的.这位玩牌专家先请一位观众将 $2n$ 张牌洗几遍,然后一张一张地发，分成两部分并且随时想停就停.但是两部分的牌数要相等.这时他可以有一个选择，他可以选两堆牌中的任何一【157】堆，再不然就选那些仍然留在他手中的牌.如果他选桌上的任何一堆，请他先看看最上面的一张，然后把留在手中的那些牌放在这堆牌的上面.拿起这些放在一起的牌并且做先移牌再发牌的老套.如果他是选留在手上的牌，请他看看最底下的一张，再和桌上的牌合在一起.不过,这一次要先发牌再移牌.手上最后的一张牌两次都是他所看到的牌.

以上的把戏，问题在于决定被选的牌要放在什么地方.其实这只是另一种更为广泛的问题中的特例而已.这个广泛的问题在娱乐数学家中通称之为约索夫问题②.好些游戏都用这个问题为依据.譬如说，一群人站成一个圆圈.每个人都会被拉出来处死刑，只有一个人可以幸免.拉人的方法是由法官将这些人一个个的点数，每点到第 n 个就拉出去，一直到只剩一个人为止，他就是幸存者.问题的关键是，要想不被拉出去应该站在哪里.以上所有的纸牌戏法都是玩拉人游戏中 $n=2$ 的特例变型而已.有关约索夫问题的渊源，请参阅波尔先生的名著《数学游戏专论》.③

有关五张牌的文献，就我所知最早出现在李先生于 1950 年所写的《数学奇迹》④,书中的第 14 章介绍了乞里先生的戏法.和我在前文中所介绍的极为相似.唯一的不同是由魔术师从这 5 张牌中选出一张.如何用不同的编号来决定观众所选的牌是什么牌，我

① George Heubeck.

② Josephus Problem.

③ W. W. Rouse Ball: *Mathmetical Recreations & Essays*

④ Wallace Lee: *Math Miracles*.

认为是鲁斯达克先生①最先报导这个问题的.他当时出版一份现今业已停刊的杂志,名叫‘玩牌家’②.他的文章发表在1957年的9月份和1958年的2月份(分别为第4期,第5期),他讲的方法似乎并不十全十美.(其实哪里有十全十美的玩法呢?)以后又有一位阮荪先生③在一份加拿大的魔术杂志④上写了一些新的建议，而且其他的魔术杂志也陆陆续续介绍过不同的玩法.

答案

最后的4张牌当然不是被选中的牌，所以共有48张牌要有编【158】号以便分辨.魔术师和他的助手要先有约定怎样来决定整副52张牌的次序.每一张都有从1到52与之对应的特定编号加以区分.用来传送密码的4张牌可以分别代表一个数字依其大小次序可以指定为A,B,C,D.4张牌可以有24种不同的排列法.24正好是48的一半.既然48张牌已经预先有了约定的数字，可以再分成两部分,上一半是大牌(25—48),下一半是小牌(1—24).假定所选的牌是下半部里的第17张.17这个数可以用手中的4张牌的排列来决定.唯一要考虑的是，是上半部还是下半部的17.

到此为止，整个戏法的关键是在乎回答是上半部还是下半部这个问题.这不能再从4张牌的顺序上传递，而且在我们叙述这个戏法时，各种可能用来做夹带的可能性，诸如牌背上做记号，找不同的传牌人,利用装牌的盒子,交牌的时间等等,都已一一排除,似乎已无隙可乘.

但是仍然有一个非常微妙的漏洞！那就是厄根太太的房间号

① Rusduck.
② *The Cardiste*.
③ Tom Ransom.
④ *Ibidem*, 1961年12月份,31页

码。厄根夫妇原来订了两间里面相通的房间。既然厄根先生是在牌已经选好之后才说出他的房间号码，所以可以利用不同的房间号码来告诉他太太这 4 张牌所带来的密码是属于上半部还是下半部。厄根太太只要听见是那一个房间有敲门声，再看看 4 张牌带来的密码，当然可以说出那张被选出的第 5 张牌了！

纽约市的读者爱尔斯金先生①写了一首如下的打油诗可用来作这个假想年会的结尾：

一位女士，法力无边。
分身独占，两个房间。
送来密码，只看一半。
给出答案，却是全篇。

① Robert S. Erskine, Jr.

第 14 章
除不除得尽?

随意从皮夹里抽出一张一元的钞票，上面印的号码是61671142. 连一个小学生都能一眼就看出这个数可以被 2 整除 ,而且不能被 5 整除 .所谓整除就是正好除尽，也就是除了之后没有余数的意思 .它能不能被 3 ,或 4 ,或 11 整除呢？一个大的数能不能被 1 到 12 之间的各数整除，很多人，包括数学家在内都不知道一些试测的方法 .其实有好些规则在文艺复兴时代便已流行甚广 .那时连小数点的观念都还没有产生，但是将一些大数分解成较小数字的乘积，或分数的约分在当时是件十分重要的事 .这些规则都很简单 ,对数字谜有兴趣的读者一定更乐于知道 .

被 2 整除的试测法：最后一位数是偶数的数可以被 2 整除，也只有这样的数才能被 2 整除 .

被 3 整除的试测法：把被测数各位上的数相加，如果相加之和仍在两位以上，则把每位数再相加，直到和只有一位数为止 .这个数称之为原数的数根 .若数根可以被 3 整除则原数也可以被 3

整除 数根如果不是 3 的倍数,它比 0、3 或 6 所大的差就是原数被【160】3 除后所得的余数.例如这张钞票上的数的数根是 1,所以原数被 3 除后余数是 1.

被 4 整除的试测法:一个数当且仅当它最后的两位数能被 4 整除的情况下,才可以被 4 整除.(因为如果将原数的最后两位暂时拿开并换成 00,剩下来的数一定是 100 的倍数,那是一定可以被 4 整除的.)钞票上的数最后两位是 42,用 4 去除余数是 2,所以原数被 4 除后余数也是 2.

被 5 整除的试测法:一个数只有以 0 或 5 结尾时才能被 5 整除.不然最后那一位数比 0 或比 5 多出的数也正是原数被 5 除了之后的余数.

被 6 整除的试测法:因为 2 和 3 是 6 的因子,所以可以将被 2 整除和被 3 整除的试测法一并使用.一个数当且仅当最后一位数是偶数,同时数根又可以被 3 整除时,才可以被 6 整除.

被 8 整除的试测法:一个数只有在最后三位数可以被 8 整除的情况下才可以被 8 整除.(这当然是因为 1 000 这个数以及其所有的倍数都可以被 8 整除.)最后三位数被 8 除后所得的余数,也就是原数被 8 除后的余数.(这个规则可以用来试测某数可否被 2^n 整除.只有最后 n 位数可以被 2^n 整除时原数才可以被 2^n 整除.)

被 9 整除的试测法:一个数当且仅当它的数根等于 9 时才可以被 9 整除.如果数根不等于 9,那么原数被 9 除了之后的余数也正是这个数根.钞票上的数的数根为 1,所以用 9 除之后余数也是 1.

被 10 整除的试测法:一个数当且仅当其最后一位数是 0 时才能被 10 整除.同时最后一位数也正是原数被 10 除后的余数.

被 11 整除的试测法:由原数的最后一位开始，先减去前一位数，再加上更前面的一位数，继续如此的减一加，如果最后得到的

数可以被 11 整除,则原数也可以被 11 整除.(如果结果是 0,也当作是可以被 11 整除.)再用钞票上的数为例,2 - 4 + 1 - 1 + 7 - 6 + 1 - 6 = -6,它不是 11 的倍数,所以原数也不是 11 的倍数.那么原数用 11 除后的余数是多少呢?这要看最后所得到的数而定.如果它比 11 小而且是正数,这就是余数.如果它比 11 大,那么先用 11 去除(或减去 11),直到剩下来的数比 11 小为止,这也正是余数.如【161】果它是负数，那么要先加上 11.(例如上面所得到的数是 -6, -6 + 11 = 5,这就是说钞票上的数被 11 除了之后余数是 5)

被 12 整除的试测法:12 的因子是 3 和 4.故而要能被 12 整除,只要而且一定要被 3 和 4 都整除才行.

明眼的读者，读过以上各种试测法后，一眼就会看得出来有一个数的整除试测法似乎是刻意地被忽略了.那就是 7,也是中古时期的卜卦占星学中带有神意的一个数.只有这么一个数，至今尚没有人能找到一个简单的试测法.7 这个数，居然全然不合常理.这正是许多喜欢研究数论的人感到兴味无穷的地方.被 7 整除的试测法，已经知道的差不多有十几种，不但每一个都不相关联，而且用起来也相当花时间.甚至比直接用 7 去除还更花时间.

这里是古老的试测法中的一种.从原数的最后一位数开始,依次用 1,3,2,6,4,5 乘各位数.原数如果位数很多则依这个顺序一直乘下去.将每次的乘积相加.如果这个乘积之和可以被 7 整除则原数也可以被 7 整除.让我们用钞票上的数，上述的方法可以执行如下:

$$2 \times 1 = 2$$
$$4 \times 3 = 12$$
$$1 \times 2 = 2$$
$$1 \times 6 = 6$$
$$7 \times 4 = 28$$
$$6 \times 5 = 30$$
$$1 \times 1 = 1$$

$$\begin{array}{r} 6\times3=18 \\ \hline 99 \end{array}$$

99被 7除余数是 1，所以原数被7除之余数也是 1. 这个试测法可以用所谓的'去 7法'稍加简化. 那就是先将每个乘积减去 7或 7的倍数. 所以 12变成 5, 28变成 0等等. 各乘积之和便由 99变成22,再变成 1. 这个简化的方法实际上也是先将原数中所有 7的倍数去掉而已. 而其基本原理是找出 10的各次方以 7为模的同余数而已. 这就是 1, 3, 2, 6, 4, 5的来源.（所谓以 7为模的同余数，那就是用 7除了之后的余数）上面这个数列中的 6, 4, 5也可以用 −1, −3, −2来代替. 对同余数有兴趣的读者可以【162】参阅《数学导论》一书①. 一旦对这个原理有了相当的了解之后，那么便可以衍生出可被其他各数整除的试测法. 早在 1654年,帕斯卡②就说过,被 13整除的试测法可以根据 10的各次方以 13为模的同余数数列 1, −3, −4, −1, 3, 4,…乘各位数之后，再由乘积之和决定原数是否可被 13整除. 这和以上所介绍被 7整除的试测法的原理完全相同.

如果用同样的方法来试测 3, 9, 11的整除性. 我们会得到什么样的同余数数列？以 3或 9为模,10的各次方的同余数数列是 1, 1, 1, 1, …，这就是为什么在我们介绍被 3和被 9整除试测法时要各位将原数的数根求出来的理由所在. 若以 11为模,10的各次方的同余数数列是一 1, +1, −1, +1, …. 前面讨论被 11整除的试测

① 本数原名是 *What is Mathematics*，作者是 Ricarhd Courant和 Herbert Robbins, 1941年出版. 1969年台湾水牛出版社出的中译本是吴定远先生所译. 中国大陆至少有两个译本，其一是孙本旺先生译的，书名叫《什么是数学》,国防科技大学出版社出版. 另一个译本是 1948年中华书局出版的,译者是余介石、齐植案等. ——译注

② Blaise Pascal.

法时不就是这个数列的应用吗？读者或许有兴趣找出每个数整除试测法所会用到的同余数数列，以便验证各个不同的试测法之间的关联,而对于 6 和 12 两数还会得到新的试测法.

有一位史本斯先生在 1956 年 10 月份的《数学公报》①上介绍一个怪方法试测 7 的整除法.(根据狄克生的《数论史》②的说法，这个方法是早在 1861 年由俄国的兹比可夫斯基③所发明）先将原数的最后一位切掉，加倍之后，从被切掉尾巴的数中减去.如此一直做到只剩一位数为止.如果此数是 0 或 7 ,则原数可被 7 整除.这个方法用在钞票上的数，如下：

```
 6 1 6 7 1 1 4 2
             4
─────────────────
 6 1 6 7 1 1 0
           0
─────────────────
 6 1 6 7 1 1
         2
─────────────────
 6 1 6 6 9
     1 8
─────────────────
 6 1 4 8
   1 6
─────────────────
 5 9 8
 1 6
─────────────────
 4 3
 6
─────────────────
-2
```

① *The Mathematical Gazzett*. D.S.Spence.

② *History of the Theory of Numbers* by L.E.Dickson.

③ A. Zbikovski.

最后所得的数不能被 7 整除,所以原数也不能被 7 整除. 这个方法的缺点是无法预测被 7 除后的余数.

有一位里昂斯先生①，他是纽约的一位神经精神病专家. 他所发明的被 7 整除试测法,我认为是效率最好的,尤其是用在位数较多的数字上. 图 72 说明这个试测法的各个步骤. 我相信这是第一次公布于世. 图中是用随意选的一个十三位的数为例. 这个方法用在六位数上特别快. 用一个三位数，一个两位数及个位数作一个三角形便可以得到结果，因为最后的单位数就是原数被 7 除后的余数.

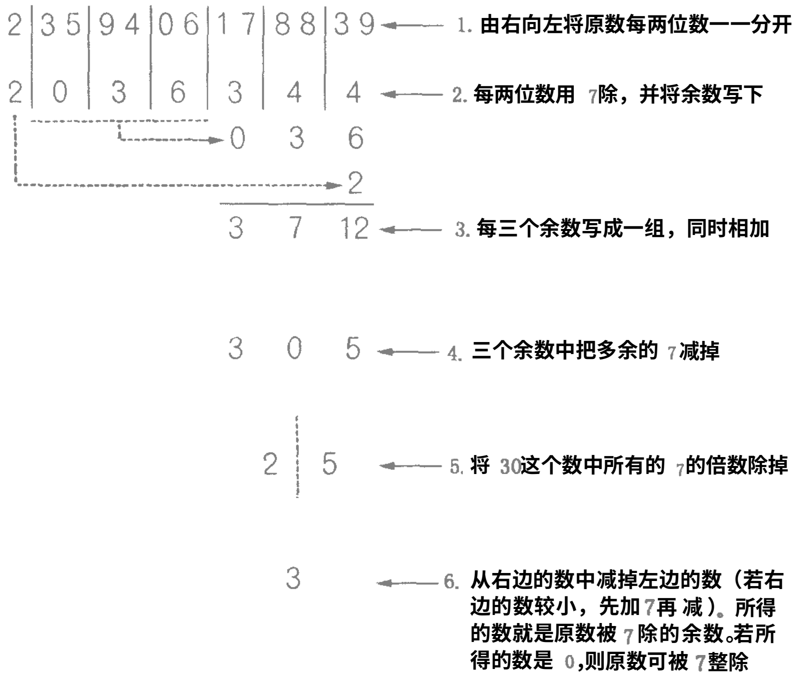


图 72 里昂斯试测 7 的整除性所用的方法

① L. Vosburgh Lyons.

利用上述的方法,里昂斯先生又发明了好些所谓‘神算家’的64】游戏,都牵涉到六位数.现在只介绍一个①.

先请任何一位观众在黑板上写下一个六位数，而且是不能被7整除的,例如431576.表演者就说他可以将这六位数略加修改而一口气写下6个六位数,全都是7的倍数.

4	3	1	5	7	A
4	3	1	5	B	6
4	3	1	C	7	6
4	3	D	5	7	6
4	E	1	5	7	6
F	3	1	5	7	6

4	3	1	5	7	1
4	3	1	5	3	6
4	3	1	6	7	6
4	3	6	5	7	6
4	7	1	5	7	6
3	3	1	5	7	6

图73　如何将不能被7整除的六位数改成六个可以被7整除的数

第一步，先将观众写下的六位数在一个$6\times6=36$格的正方形里连写6遍.不过，第1遍不要写最后一位数，第2遍不要写倒数第二位数，即每一个数都有一个空位.这就是图73中左边正方形里的A,B,C,D,E和F.在表演时这六个方格是空白的.原来的数不能被7整除，而且知道被7除后的余数是5.故而原数要减去5才可以被7整除，所以要在A格里写下一个1以代替6.

A格里的数找到之后，其他的空格中的数可以很快地找到.第二排最后两位数是B6,它的上面是71.71被7除之余数是1.所以要把B6改成一个数使它用7除之后余数也是1,显然B应该是3.

① 请参阅1956年4月份的 *The Mathematical Gazzett*, No.5

(你也可以这样想,从 6减去 1 得到 5,然后再问有什么两位数又是[165] 7 的倍数而且最后一位数又是 5,它当然是 35.)接着看 C7,它上面的数是 53,用 7 除余数是 4,所以 C 是 6,才能使余数也是 4.用同样的方法一步步做下去，答案就是图 73 里右边方阵中所写的 6 个六位数.被 7 整除的试测法本来不简单，所以上面这个游戏甚至有些数学家也会叹为观止.如果是要找可以被 9 整除的数,相比之下就简单多了！

有些牵涉到数目字的问题，看上去很难解.但是如果有一点有关整除性的背景知识则常常可以找到快捷方式.比如用 A 到 9 点 9张纸牌,任意地排列.请问所排出的数能被 9 整除的概率有多大？因为从 1 加到 9 之和是 45,其数根为 9,故而马上知道所排出来的数一定可以被 9 整除(概率是 1).若用从 A 到 4 点的 4 张牌随意排列，那么这个四位数能被 3 整除的概率有多大？如果知道被 3整除的试测法，那么这个四位数一定不可能被 3 整除.所以概率是 0.

下面介绍一个游戏.首先将从 A 到 9 的 9 张牌交给观众中任何一位.在你转过身去之后，请任何一位观众将 A 到 4 这四张牌排在桌上做成一个四位数.用不着转身过来,你便可以说这个四位数不能被 3 整除.说了之后叫他们把“5”这张牌拿出来并且重新再摆出一个五位数，摆好之后，你便说这个新数一定可以被 3 整除,而且仍然用不着转过身来.

下面有几个数字游戏的问题，全都和这一章所讲的主题有关.各位不妨在未看答案之前试试自己的技能.

1. 某人年纪比九岁大但小过一百.如果将他的年纪重复写三次,写成一个六位数(例如 484848),请证明这个数一定可以被 7整除.

2. 将从 A到 7 的 7 张点数不同的牌放在帽子里，再好好地抖一抖.然后将牌一张张地拿出来排成一排.请问这样做成的七位数

【166】可以被 11 整除的概率有多大？

3．某数用 2 除余 1，用 3 除余 2，用 4 除余 3，用 5 除余 4，用 6 除余 5，用 7 除余 6，用 8 除余 7，用 9 除余 8，用 10 除余 9。请问这种数中最小的一个是什么数？①

4．有个小孩手上有 n 个小方块积木，大小全一样。他想用来做成一个大的立方体。但是摆来摆去总是比他想做成的大立方体少了一排小方块。请证明 n 一定可以被 6 整除。

5．3 的 123 456 789 次方被 7 除的余数是多少？

6．在 10 个单位数字中，任取 4 数，0 不包括在内，不论怎么排所成的四位数总不能被 7 整除。请证明。

上面的问题看上去难。只要着手的方法正确，其实并不难。最后一题可能要费点劲去硬算。任何读者做完这 6 个题目之后，一定会感到好似去了一趟数论健身房练了身体一样。

增注

这一篇讨论整除性的文章发表之后，我收到许多读者们的来信，说明兹比可夫斯基的试测法之所以有效的原因所在。也有些读者谈到除了 7 之外，这个方法也可以用在别的素数上以及决定余数的大小。也有些读者讨论里昂斯的试测法。只可惜好些文章牵涉太深的数学细节，使我也感到很难了解。

另外还有十几位读者提供其他被 7 整除的试测法。在这里我只介绍一种被最多读者讨论的方法。这个方法所根据的是 1001 这个数可以被 3、7、13 整除。（除此之外，它也正好是《天方夜谭》中所提到的"一千零一夜"。）将要试测的数，从右到左分成一段段三位数，例如 61 671 142 就分成 61/671/142。然后把这三个 3

【167】

① 在中国古代数学中，有著名的韩信点兵问题。本质上也是同余算术问题。此题只是简单的特例。

位数交替加减，即 142－671＋61，结果是－468．此数被 7，11，13 除后所得的余数也正是原数被 7，11，13 除后的余数．

读者若对被 7 整除的试测法，或被其他的数的整除试测法有兴趣，我在本书的后面介绍了一些值得参考的文献．这一章的参考书目中的第一本可以顺手查到老的参考文献，其他所列的书和文献都不难读．

答案

1．一个具 ABABAB 型的数，实际上等于 AB 和 10101 的乘积．10101 是 7 的倍数，故而 ABABAB 可以被 7 整除一定是理所当然了！

2．用 1 到 7 任意排列成一个七位数，此数能被 11 整除的概率是 $\frac{4}{35}$．一个数可以被 11 整除的条件是，从右边算起，第一位、第三位、第五位等各数之和，与第二位、第四位、第六位各数之和相减，两者之差必须是 0 或能被 11 整除才行．1 到 7 七个数相加之和是 28．28 只能分成两部分，其相减之差能够符合上述的条件，即 14－14 和 25－3．25－3 这种分法是不可能的，因为由 1 到 7 任何三个不同的数相加都会比 3 大．因此我们只能考虑 14－14 的组合．所排出的数若以 ABABABA 来表示，其中之 B 相加为 14 的可能性有 167，257，347 和 356 四种．但 ABABABA 中的 B 有 35 种组合，故而所排之数能被 11 整除的概率是 $\frac{4}{35}$．

3．一个数被 2 到 10 各数所除余数皆为 1，其中最小的数是 2519．有一本书，书名叫《新谜和老谜》①．书中的主角叫做何福满教授．他说这个问题太难，接着花了两页的篇幅才算出答案．但是何福满没有想到既然每次的除法离整除只相差 1，那么只要将 2，【168】

① *Puzzles Old & New*，1893 年出版．

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的最小公倍数算出来再减去 1 不就行了吗？这些数的最小公倍数是 2 520,所以答案是 2 519.

4. 将这些小积木叠成一个大立方块而且总是少一排.所少的一排正是大立方块的边长.故而小方块的总数是 $n^3 - n$(n 是任何数).所要证明的就是这个数可以被 6 整除：

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1).$$

这就是说 $n^3 - 1$ 是三个连续数的乘积.三个连续数中一定有一个可以被 3 整除.而且三个连续数中一定有一个是偶数（也可能在这三个数中会有一个数同时具有两种特性，例如 17, 18, 19 之中的 18).既然这三个连续数既可以被 2 整除又可以被 3 整除,当然可以被 $2 \times 3 = 6$ 整除.

5. $3^{123\,456\,789}$被 7 除之余数是 6.3 的各次方用 7 去除所得的余数依次为 3, 2, 6, 4, 5, 1，而且这个数列一直循环下去.将 123 456 789用 6 除,余数是 3，也正好是余数数列中的第三个数，所以本题的答案是 6.

一个数递次自乘,并且用 7 去除，所得的余数一定形成一个循环的数列.所有以 7 为模的同余数之各个幂数用 7 除后所得到的循环数列都是一样的.任何以 7 为模余数为 1 的数其各次方用 7 除余数都是 1,由 7 为模余数为 2 的各数其各次方用 7 除其余数可以是 2, 4, 1.3(mod7）之各次方用 7 除其余数数列如上所述.4(mod7)之各次方用 7 来除其余数数列是 4, 2, 1.5(mod7)是 5, 4, 6, 2, 3, 1.6(mod7)是 6, 1.7(mod7)当然是 0.

$123\,456\,789^{123\,456\,789}$ 被 7 除余数是多少？以 7 为模 123 456 789 等于 1,所以上数用 7 来除,余数一定是 1.

6. 任何不包括 0 之四位数不能被 7 整除的有哪些？在 126【169】个可能的组合中只有 3 个不能被 7 整除.它们是 1 238, 1 389 和 2 469.

第 15 章
9 个小问题

1. 七张卡片

一张标准大小的 A4 纸，长 $12\frac{1}{2}$英寸，宽 $8\frac{1}{2}$英寸，其面积为 $106\frac{1}{4}$平方英寸. 七张小卡片，每张长 3 英寸，宽 5 英寸，故总面积为 105 平方英寸. 所以这 7 张卡片显然无法将那张纸完全盖住. 请问这 7 张卡片所能盖住的最大面积是多少平方英寸？盖的时候，卡片必须平放不可折叠，也不准切成小条. 卡片可以越过这张纸的边，但是不必所有的卡片都和纸边平行. 图 74 中显示这 7 张卡片如何盖住了 $98\frac{3}{4}$平方英寸. 这只是一个例子，所盖的也不是最大可能的面积.

这个小游戏可以全家人一起玩，老少咸宜，大家都可以玩得很开心. 假如手头没有这些材料，可以用一张纸板切出 $8\frac{1}{2}\times 12\frac{1}{2}$的长方形. 小卡片则可以用 3×5 的小纸片来代替. 大纸板上最好

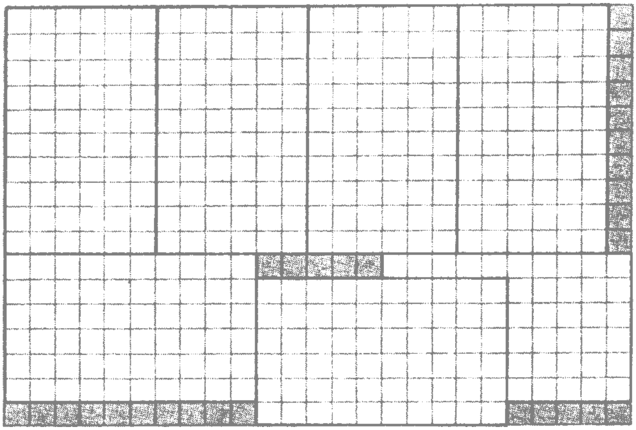


图 74 七张卡片能盖住多少面积？

先画出一些边长 $\frac{1}{2}$ 英寸的小方格，那么盖住的面积便可以很快算 [170] 出来．

这个问题是由哈里布登先生最早提供的，刊登在 1961 年 12 月份的《数学游戏》月刊上①．

2．憎爱分明

好莱坞有 6 个电影明星，组成一个非常特殊的小集团．在这个小集团中，任何两人，如果不是相爱就是相恨；而且其中也没有彼此都相爱的 3 个成员．请证明，他们之中至少有 3 个彼此都相恨．这个小问题把我们带入“图论”②中一个新的、引人入胜的领域，称之为‘单色图”③，其特性我们将在答案中再加介绍．

① Jack Halliburton, *Recreational mathematical Magazine*, December 1961.
② graph theory.
③ blue-empty chromatic graphs.

3. 连胜两局

一位数学家，他的太太和十几岁的儿子都喜欢下棋。有一天，这年轻人向他父亲要十块钱，以便周末和女友约会。他父亲想了一会，说道“这样好不好，今天是星期三，你要下一盘棋，明晚下一盘，后天晚上再下一盘。我和你妈妈轮流作你的对手，如果你能连赢两局，便可以拿到钱。”

“跟谁先下，你呢还是妈妈？”

“由你决定，”数学家回答道，同时不停地眨眼睛。

这年轻人知道，父亲的棋艺较精，妈妈稍差。他是应该选父亲—母亲—父亲的顺序呢还是母亲—父亲—母亲的顺序才有最大可能连胜两局？

这个有关概率的小问题是加拿大阿伯达大学的数学家莫塞尔先生①所提出来的。答案不可以只靠猜，一定要有证明才算。

4. 字母算式

一般的字母算式②中，不同的数目字就用不同的字母来代替。图 75 中的两个乘法算式却与众不同，不沿用习惯的规矩而做，但是求解并不难，每一题只有单独一个解。

```
    E E O          P P P
      O O            P P
  -------        -------
  E O E O        P P P P
  E O O        P P P P
  ---------    ---------
O O O O O      P P P P P
```

图 75 两个非正统的字母算式

① Leo Moser of University of Alberta.

② cryptarithms.

这两个乘法中，左边的一个是哈特福大学的契尼先生①所提供的,其中的 E 代表一个偶数, O 则代表奇数. 这并不是说所有的 E 都是同一个偶数. 譬如说,一个 E 可以是 2 ,另一个 E 可以是 4. 零算作偶数. 请将原题用数目字写出来.

右边的那个乘法中,每一个 P 代表一个素数(即 2, 3, 5, 7). 这个问题早在二十年前就由康乃尔大学的一位化学家崔勿尔先生②所提供，至今已成为这一类谜题之中的经典之作.

5. 正方形的分割

将一个正方形在角上切去四分之一，所剩下的图形能不能分割成恒等的四块？（所谓恒等就是又同形，面积又相等）. 答案是可能，正如图 76 左方所示. 与此相仿，把一个等边三角形的顶上切去四分之一，剩下来的图形也可能分割成恒等的四块. 如图 76 中所示. 将一个几何图形分割成一定数量的恒等的小块又使它们能填满较大的图形，这一类的问题有很多，以上便是两个典型的例子.



图 76　三个几何图形分割的谜题

图 76 之右是一个正方形，可不可能分割成五个恒等的图形？答案是可能而且解是唯一的. 分割的形状可任意选择，复杂的甚至

① Fitch Cheney of University of Hartford.

② Joseph Ellis Trevor of Cornell University.

奇特的都可以，只要形状相同且面积相等即可．如果图形是‘非对称的”,甚至可以将图形翻个身,即镜像图形和原图形算作恒等．这个问题除非有闪电般的灵感，否则是相当费心思的．

6．交通阻塞

阿伯特先生写了一本书，书名是《阿伯特的纸牌新游戏》①书介绍了一个奇怪的城市地图，如图 77 所示，并附有以下的小故事：

“印第安纳州的某一小城，因为一共只有 37 辆登记有照的汽车，所以市长先生认为让他那游手好闲的堂弟史太宝来做交通专

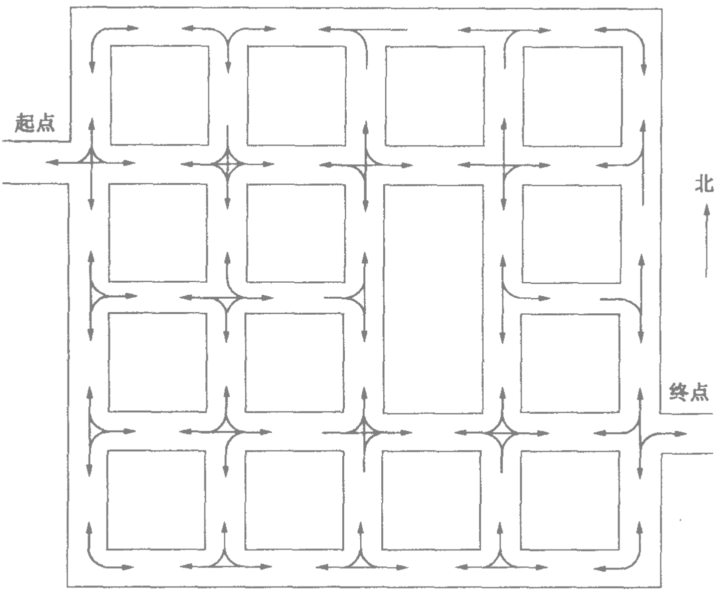


图 77　印第安纳州某小城的街道图

① Robert Abbott, *Abbott's New Card Games* (New York: Stein and Day, 1963).

员应该没有问题.不久之后他对这项任命后悔不已.一天早上,城【173】里多了一大堆交通指挥,好些街道变成了单行道,好些街道又不能朝某一个方向转弯,令人稀里糊涂.

“许多市民都吵着要把这些路标拆下来,但是市长的另一位做警务专员的堂弟却有一个惊人的发现.开车穿城而过的人都怒气冲天.因为每一位都或迟或早得到违反交通的罚单,而且罚的款项比超速的罚款多得多.

“市政府收入增加,大家也都十分高兴.尤其是马上就是星期六,这是大家赶花会的日子.最有钱的农场主人麦克亚当先生一定要从城外的一端,穿过城去参加花会.大家都等着罚他一大笔钱,因为穿城而过又不吃罚单几乎是不可能的,所以大家都希望好好地敲他一大笔.没有想到麦克亚当先生前一天晚上就把各个路口上的路标好好地研究了一番.星期六早上,他从自己的田庄开车穿城而过,到达会场竟一张罚单都没有拿到!全体市民都大吃一惊.

【174】“麦克亚当是如何穿城而过的?在每一个街口一定要遵守路标的箭头而行.那就是说,要转弯的话,一定要看到有一段表示可以转弯的曲线才行.要直走,也一定要有直线指示.倒车转弯或者转一百八十度都是不允许的.走到下一个交口,也一定要遵守箭头的指示.例如,从离开农场开始,在第一个十字路口只有两个选择:一个是朝北走,另一个是直走.假如直走的话,到了第二个十字路口又只能直走或朝南走.这里的路标确实有一条曲线指向北方,但是并没有箭头,所以不能朝北走.”

7. 李特武德的脚注

有些杂志的封面,经常会用同期封面的图片作封面.所以封面上便再印一幅小一点的封面.当然这个小一点的封面图里又有再小一点的封面图.如此不断重复下去,这个所谓‘无限递推’过程有

时会给逻辑或语意学带来纷扰．当然某些情况下可以避免这种无休止的循环．有时则避免不了．英国的大数学家李特武德先生在他的名著《数学家杂感》①中便对这个问题作过评论．他提到自己发表的某一篇文章后面有三个脚注．这篇文章是刊登在某一个法文的期刊上，所以这三个脚注也是以法文印出来的．三个脚注是：

甲：十分感谢里斯教授②翻译这篇文章．
乙：十分感谢里斯教授翻译上面的脚注
丙：十分感谢里斯教授翻译上面的脚注

假定李特武德先生对法文一窍不通，请问在作了三个脚注之后，他用什么理由来避免同样脚注的无限递推呢？

8．九子成百

下面这个问题渊源已久，可是却一直不停地出现在讨论数学[175]游戏的书中,好像从来没有被分析过似的．问题是问：依 1，2，3，4，5，6，7，8，9 的顺序写下这些数字，再加上一些运算符号如何使整个等式等于 100？运算符号可以随心所欲地使用．这个问题的答案有几百种，下面这个可能是最常被引用的一个：

$$1+2+3+4+5+6+7+(8\times9)=100.$$

如果运算符号只限于‘ + ’或‘ − ”,问题可能稍为难些,但是也有许多答案，例如：

$$1+2+34-5+67-8+9=100,$$

$$12+3-4+5+67+8+9=100.$$

① J. E. Littlewood，*A Mathematician's Miscellany*（London：Methuen，1953）.

② Prof. Riesz.

123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100,
123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100,
123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100,
123 - 45 - 67 + 89 = 100.

英国的数学游戏大师杜登尼所写的《数学中的乐趣》一书中第 94 题的答案就是上列各答案中最后的一个. 他说"最后这个答案是如此地简短精致，我相信不可能有比这个更漂亮的答案了."

这个问题虽然如此地流行，但是令人想不到的是很少见到有人将数字的顺序颠倒过来做. 那就是从 9 开始,写到 1,中间再加上尽可能最少的运算符号，直到等式之值为 100 为止.

9. 两个垂直相交的圆柱体

微积分中的一些基本观念阿基米德早已有所领悟. 这也是他最大的成就之一. 图 78 就是一个经典的例子. 绝大多数现代数学家们都以为不用微积分似乎没法解(实际上,许多微积分的教本中也有这个题目). 可是阿基米德,以他超人的睿见,却可以迎刃而解. 这两个圆柱体垂直相交，假定每个圆柱体的半径是一个单位长度. 请问两者相交部分的体积有多大？相交部分在图中以深色表示①.

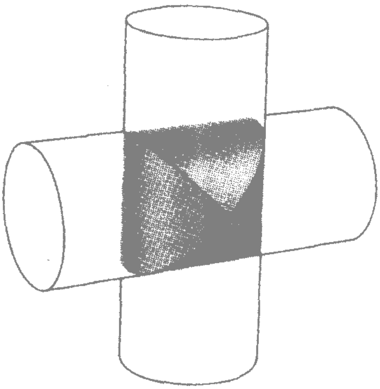


图 78 阿基米德的直交圆柱问题

阿基米德解答这个问题的细节已无史籍可资参考. 但是实际

①这个立体在许多微积分教本里称为维维安尼（Viviani)体. —— 译注

上有一个十分简单的方法来求解.所用到的数学知识不过是算圆的面积(π乘半径的平方)和算球的体积(π乘半径的立方再乘$\frac{4}{3}$)而已.很可能阿基米德用的就是这个方法.有些问题不一定要用微积分才能求解，常常可能有比较简单的方法这就是一个最好的例子.

答案

1. 七张卡片

如果规定小卡片的边必须和纸边平行，则最多可以盖住100个平方英寸.答案很多.图79是答案之一.

巴尔先生①是第一位首先指出，假如最中间的卡片可以稍稍倾斜一点，则盖住的面积可以增加到100.059+平方英寸.接着万

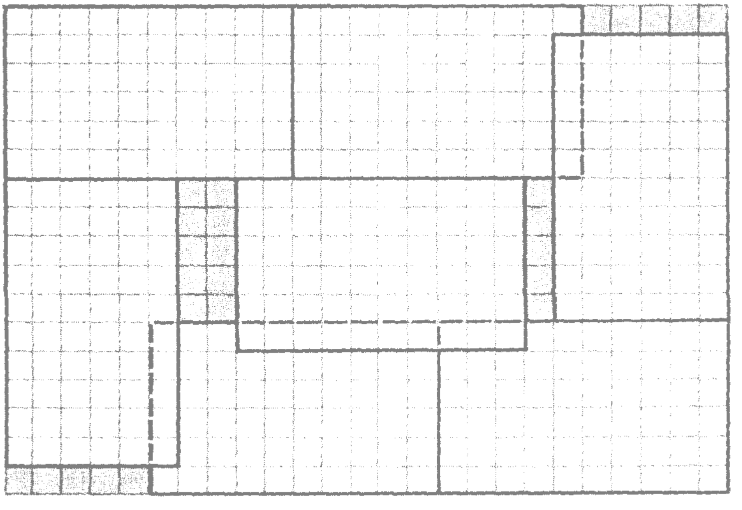


图 79　七张卡片可以盖住 100 平方英寸

① Stephen Barr.

德普先生①又指出，中间的小卡片可以多倾斜一点，只要保持该卡片的中心位置和要盖的面积之中心一样，则可将盖住的面积稍稍增加．卡片倾斜的角度要用微积分来算．白洛克先生②发现，倾斜角度若在 6°12′ 到 6°13′ 之间，所盖住的面积直到小数点后五位为止都没有变化．大约是等于 100.065 8⁺ 平方英寸．玛达其先生在《数学假期》③中曾介绍了这个问题的简史．并且也介绍了罗威先生④的计算．当倾斜角是 6°12′37.897 3 时，所盖住的面积为 100.065 834 498⁺ 平方英寸．

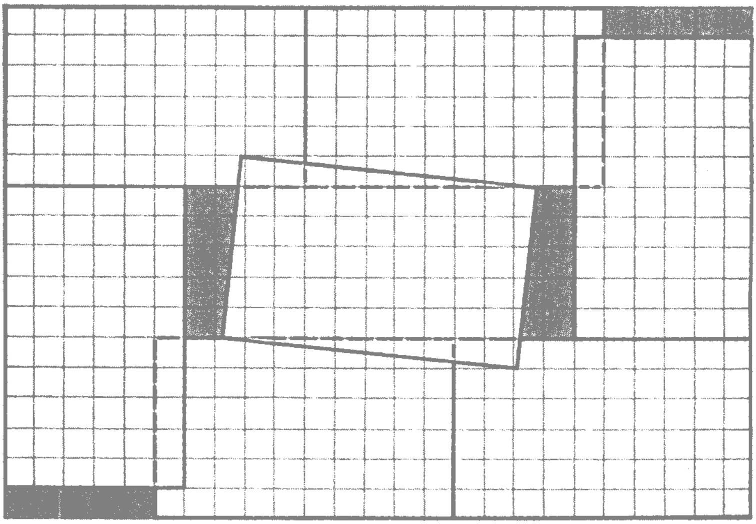


图 80 卡片稍加调整可以多盖住一平方英寸的一小部分

2．憎爱分明

① Donald Vanderpoor.

② James Block.

③ Josephy S. Madachy, *Mathematics on Vocation* (New York: Scribner's, 1966).

④ R.Robinson Rowe.

六个人组成的一个小团体，其中任何两人不是相爱就是相恨，但是却没有彼此相爱的三人小组．我们要证明的是,这个小团体中【178】一定有一个彼此相恨的三人小组．

这个问题用图论法可以很容易证明．我们用六个小黑点代表每个成员(见图 81)．各个黑点之间用虚线来相连，不论他们是仇敌还是朋友．然后用蓝线表示相爱，红线表示相恨．

从 A 点讲起，从这一点射出来的五条线,至少有三条会是相同的颜色,是红是蓝不拘,是哪三条也不拘．故而我们可以假定是红线（在图中用三条粗线表示）．假定三角形 BCE 的三边全是蓝线，那么我们就得到了彼此相爱的三人小组．可是这与题意不符．所以这三条线里至少有一条是红线．不论我们选哪一条红线，后来一定会得到三边全是红线的三角形（所以至少有一个彼此相恨的三人小组）．如果第一次选的三条线不是红线而是蓝线，结果也是一样．这时 BCE 三角形的三边全是红线，不然便形成了一个三边全是蓝线的三角形．总而言之，不论最初选的三条线是红是蓝，推衍到最后一定会有一个三边全是红线的三角形或全是蓝线的三角形既然全是蓝线的三角形不允许存在，那么一定有一个全是红边的三角形．

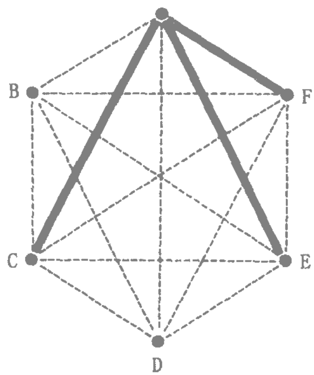


图 81　第 2 题的图解

实际上还可以得到一个更强的结论．如果没有三边全是蓝线的三角形，那么一定至少有两个全是红线的三角形（推论的程序较为复杂）．在“图论”中，这种红蓝两色所作的图形若没有蓝色的三角形，则称为“缺蓝单色图形”图形中若有六个顶点，如本题所示，则至少有两个全红三角形．

缺蓝单色图形的顶点若比 6 少，则很容易画出没有红边的三【179】

角形的图.顶点有 7 个的话,则至少有 4 个全红边三角形.8 个顶点的缺蓝单色图形中的红边三角形至少有 8 个.顶点若有 9 个则红边三角形至少会有 13 个,对这个问题有兴趣作更深入研究的读者可以参阅下列专文:

1. R. E. Greenwood & A. M. Gleason, "Combinatorial Relations and Chromatic Graphs," *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 7 (1955), p 1—7.

2. Leopold Sauve, "On Chromatic Graphs," *American Mathematical Monthly*, Vol. 68, Feb. 1961, p 107—111.

3. Gary Lorden, "Blue-empty Chromatic Graphs," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, Feb. 1962, p 114—120.

4. J. W. Moon and Leo Moser, "On Chromatic Bipartite Graphs," *Mathematics Magazine*, Vol. 35, Sept. 1962, p 225—227.

5. J. W. Moon, "Disjoint Triangles in Chromatic Graphs," *Mathematics Magazine*, Vol 39, Nov. 1966, p 259—261.

3. 连赢两局

假定 A 的棋力比 B 强.你和他们下棋，如果目的是连赢两局的话,是先和 A 下,再和 B 下,最后再和 A 下的胜算大些，还是先和 B 下,再和 A 下,最后又和 B下的胜算大些？

令 p_1 为你可以赢 A 的概率,p_2 为赢 B 的概率.则输给 A 的概率是 $1-p_1$,输给 B 的概率是 $1-p_2$.

如果你选用 A—B—A 的顺序，那么连赢两局的可能性有下列三种：

1. 你可以连赢三局，这种情势会发生的概率是 $p_1\times p_2\times p_1=p_1^2\times p_2$.

2. 你可能先赢两局，这种情势会发生的概率是 $p_1\times p_2\times(1-p_1)=p_1p_2-p_1^2p_2$

3. 你可能赢后两局，这种情势会发生的概率是（$1-p_1) \times p_2 \times p_1 = p_1p_2 - p_1^2p_2$.

将这三个概率相加得到 $p_1p_2(2-p_1)$. 这就是你选 A—B—A 顺序而连赢两局的概率.

假如你选用 B—A—B 的顺序，则连赢三局的概率是 $p_1p_2^2$,先赢两局的概率和后赢两局的概率都是 $p_1p_2 - p_1p_2^2$. 三个概率之和是 $p_1p_2(2-p_2)$. 这就是你选 B—A—B 顺序并赢两局的概率.

p_2 是你赢 B 的概率,p_1 是你赢 A 的概率. 所以 p_2 大于 p_1 ,故而($2-p_2$)小于($2-p_1$),所以 $p_1p_2(2-p_1)$会比 $p_1p_2(2-p_2)$大. 换言之,选 A—B—A 顺序你连赢两局的胜算比较大.

除了数学分析之外，还有另一个靠常理判断的非数学证明. 要连赢两局，这年轻人一定要赢第二局. 所以第二局一定要和棋力较低的棋手对下. 除此之外，对付棋力较高的棋手，他又一定非赢一局不可,所以一定得和他对下两盘以决胜负. 所以选用的顺序一定是 A—B—A. 这个结论共有五位读者同时得到. 他们是盖尔文、麦爱弗尔、史奇德尔、史帝克斯和约斯特. 盖尔文先生又说了另一种解法. 假如这年轻人一定可以赢他的母亲，那么只要能赢他父亲一次就行了. 所以要同他父亲下两次才行. 这就是说即使不知道胜负的概率也可以用如此的特例来分析.

4. 字母算式

契尼先生所提的问题之唯一答案如下：

$$\begin{array}{r} 285 \\ 39 \\ \hline 2565 \\ 855 \\ \hline 11115 \end{array}$$

崔勿尔问题的唯一答案是

$$\begin{array}{r} 775 \\ \times\ 33 \\ \hline 2325 \\ 2325 \\ \hline 25575 \end{array}$$

两者之中，崔勿尔的问题比较难.最好的方法是要找到所有的每位数都是素数(2,3,5,7)组成的三位数，然后乘上另一个素数之后可以得到一个全由素数组成的四位数.这种组合共有四种,即

$$775\times3=2\,325,$$
$$555\times5=2\,775,$$
$$755\times5=3\,775,$$
$$325\times7=2\,275.$$

从上表看到这四种全由素数组成的三位数，每一个都只能乘一个素数而得到全是素数的四位数.这就是说用来作乘数的两位数一定是由相同的两个素数所组成.所以只要试乘四次之后便可以得到答案.

5. 正方形的分割

将正方形分割成五个恒等的图形唯一的答案如图 82 所示.那些钻牛角尖而始终找不到答案的读者感到相当的气馁，可是再看到这个简单的答案之后又会感到自己的愚蠢.

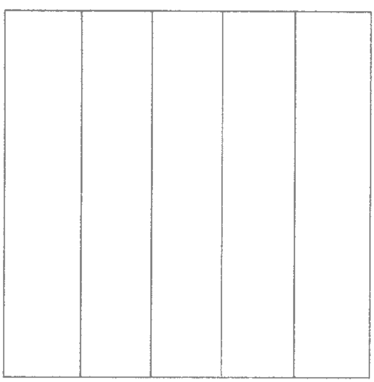


图 82 第 5题的答案

6. 交通阻塞

一张罚单都没有吃到的行车路线如下：由起点出发沿东—东一南一南—东一北一北一北一东一南一西一南一东—南一南一西一西一西一西一北

—北一东一南一西一南一东一东一东一东一北一东直到终点．

7．李特武德的脚注

“我是一点法文都不懂，’李特武德说(解释他为什么不一直重复法文的脚注），“因为我只会照抄，没有下文照抄时我只好停下来．”

8．九子成百

将九个数字从 9 写到 1 再加上四个加减号便可以得到一个等于 100 的算式如下：

$$98-76+54+3+21=100.$$

如果运算符号少于四个是无解的．本书作者所写的《马屈臣博士的数字学》①一书中列有全部的答案．

9．两个垂直相交的圆柱体

两个圆柱体，半径是单位长度，以直角相交，请问相交部分的体积是多少？下面介绍一个十分漂亮的方法，不用微积分便可以找到答案．

设想两圆柱相交之处有一个半径为单位长度的圆球．此圆球的中心是两个圆柱体之长轴的交点．再假定两个圆柱体都被通过这圆球中心的两个平面一剖为二（见图 83 之左图),则两个圆柱体相交部分的横截面一定是个正方形，而圆球的横截面一定是个圆．【183】

接着，假如不要把圆柱和圆球一剖为二，而只用刨子削一点点薄片,仍然与圆柱体的轴平行(如图 83 之右所示)．从圆柱体上削去的一小片与两柱相交部分的横截面仍然是个正方形，圆球的横截面乃是内切于此正方形的圆．有了这个结果我们不难看见（当然要用一点想像力，甚至用纸笔来描摹一下），只要是和圆柱体的轴平行，

①书的原名是 *Numerology of Dr. Matrix* (New York: Simon and Schuster，1967),书中的主角是 Matrix，本是一个专业名词，就是矩阵．此处乃用音译．—— 译注

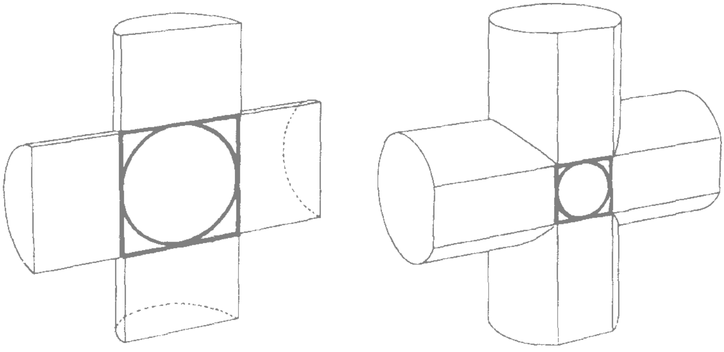


图 83 阿基米德直交圆柱及其内部圆球的两个截面

削切留下来的横截面每次都是一个正方形和内切于正方形的圆.

再假想这些一片片的横截面，像书页般的叠放在一起，那么所得到的圆体体积一定是各个小圆片体积之和.同时,两个圆柱体相交部分的体积也是每一个正方片的体积之和.因此可知圆球体积和圆柱相交部分体积之比也正是圆的面积和正方形面积之比.后两者面积之比是$\frac{\pi}{4}$.所以

$$\frac{4\pi r^3/3}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

式中的 x 便是圆柱相交部分的体积.这个式子中的 π 可以消掉.简化之后 $x = \frac{16r^3}{3}$.题目又指明圆柱体的半径是单位长度,即 $r = 1$,所以两个圆柱体相交部分的体积是$\frac{16}{3}$.也正是外接这个球之立方体体积的$\frac{2}{3}$.而外接立方体的边长等于球的半径.这正是阿基米德要告诉我们的.

有好些读者来信说上面的解答用的是卡瓦列里定理①.卡瓦

① Cavalieri's Theorem.

列里是 17 世纪一位意大利的数学家.锐兹曼先生①说过:“所谓卡氏定理，最简单的说法是，两个立体之体积相等的条件是两者有相同的高，而且以底线为准，等高部分的横截面之面积也要相等.”卡氏在证明这个定理时,就是将各个立体切成一片一片,又叠放在一起，并且引用极限的观念来证明.这岂不是微积分的前身吗？而且这种方法阿基米德便已早有领悟.有一本佚书直到 1906 年才被发现,书名叫《方法论》②.（阿基米德给本题所提供的答案也写在这本书里.）阿基米德说这个原理来自德谟克里特③.他并说德氏曾用这个原理计算金字塔和圆锥体的体积.

另外有几位读者用不同的方法利用卡氏定理.其中的一位是普尔金斯先生④.他在两个圆柱的相交处包上一个外切的立方体，并且用与圆柱柱轴平行的两个面为底构造两个金字塔，其顶点正是立方体的中心，然后再循着这个底的平行方向一片片地切而得到答案.

如果读者之中谁有兴趣来计算三个互相正交相截的圆柱体相交所成的体积,我愿意提供答案.它是 $8(2-\sqrt{2})$.有一位琼斯先生写了一本书,书名叫《数学中的难解问题》⑤,其 83 页和 287 页载有用微积分求得的解.至于讨论两个相交圆柱体的专文,读者可参阅《数学手稿》月刊,作者是布哈特先生和莫塞尔先生⑥.原文的标题是‘请不要用微积分”.另外还有一位苏登先生在《数学教师》月刊上写有一篇文章,题目是‘论史坦墨兹问题和中学算术’⑦.

① Fremont Reizman.

② *The Method*.

③ Democritus.

④ Granville Perkins.

⑤ S.I.Jones, *Mathematical Nuts*, 1932 年自费出版.

⑥ J.H.Butchart & Leo Moser, *Scripta Mathematica*, Sept.1952, p 221—236.

⑦ Richard M.Sutton, *Mathematics Teachers*, Oct.1957, p 435—455.

第 16 章
棋盘上谈数学

一般的人看到跳棋棋盘上那种黑白相间的图案会有“眼花缭乱”的错觉，但是对娱乐数学素有研究的数学家来说，他们看到有这种图案的地板时一心只会想到又有了新游戏的可能性. 在各种不同的几何图案中，最常被用来作新游戏的场地，可能就是这种图案了. 我所说的‘游戏的场地’并不是指跳棋,围棋或国际象棋,虽然它们的棋盘全有这种图案. 我所指的是这种图案的度量性质及由拓扑性质而产生的许多有趣的问题.

一个 8×8 的棋盘，如果将对角线上的两个小格切掉，剩下来的 62 格可不可能用 31 张牌九骨牌盖住?① 这个问题我最早在我的专栏里讨论是在 1957 年，如今已经是人人都知道的问题. 每一张骨牌照理是可以盖住两个小方格，一白一黑，所以 31 张骨牌应该可以盖住 31 个黑格和 31 个白格. 但是在对角线两端的两个方格，

① 玩牌九用的骨牌是 1×2 的长方形，每一张可以盖住两个小方格.

颜色是相同的，故而这被切了角的棋盘上的方格有 32 个是一种颜色，另一种颜色只有 30 个．因此之故，31 张骨牌是盖不住这 62 个小方格的．从这个如今已经是经典之作的证明，可以看得出，黑白相间的小方格，除了是悦目的图案之外，可以策划棋步，更是一个有力的工具，用它来分析多种棋盘上类似的问题以求解答．

假定我们不是切掉颜色相同的两格，而是从棋盘上任何部位切掉两个颜色不同的小方格，那么剩下来的 62 格是不是一定可以用 31 张骨牌完全盖住呢？答案是肯定的．可是有没有一个简洁的证明？当然我们可以两格两格地切，检验所得到的各种不同的组合是否可以用 31 张骨牌完全盖住，这个方法岂不又笨又吃力？加州大学有一位司各特先生①特别通知我说他的朋友哥莫瑞先生②找到一个漂亮的证明（这位哥先生是一位做研究工作的数学家）．在图 84 中，请注意棋盘上的粗黑线将整个棋盘转变成一串首尾相连，黑白方格相间的封闭路线，好像一串用黑白两色的珠子串成的项链．现在，从这棋盘上切掉任何两个颜色不同的小方格，一切之后，这条项链变成了两段小长条（如果所切掉的方格本来是相连的，那么项链环就变成一个长条项链），不论是两条小长条或一条长条，其黑色的方格和白色的方格都是偶数，故而每一条都可以用几张骨牌盖住，也就是说整个的棋盘是可以用 31 张骨牌盖住．

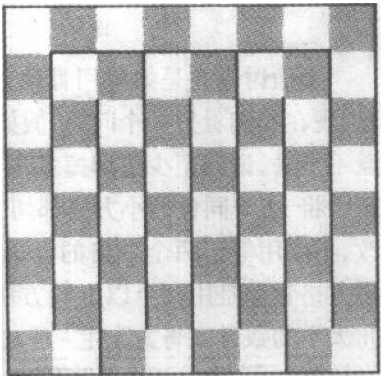


图 84　哥莫瑞的证明

① Dana Scott.

② Ralph Gomory.

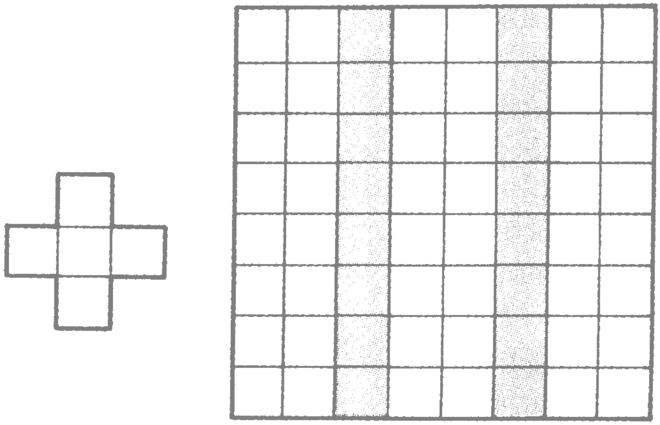


图 85 哥龙的十字架问题

上面讨论的是如何用骨牌盖满切了角，或切出两个小洞的棋盘．现在我们看另一个问题：假如我们要将棋盘切得连一张骨牌都盖不上去，请问至少要切掉多少个小方格才行？很容易看到，必须至少将 32 个同色的小方格都切去才行．我们可以将这个问题改一改，不要用等于两个方格的骨牌，让我们用多方格的骨牌．①所谓多方格骨牌是用两个以上的方块沿边连在一起的几何图形．南加州大学的数学家哥龙先生②写过一本《谈多格骨牌》③，书中就讨论过这个问题，而且用各种不同形状的多格骨牌回答了这个问题，包括 12 种不同的五格骨牌在内，全都找到了答案．让我们用希腊型十字架的五格骨牌为例．假定图 85 中的棋盘是一张 8×8 格的纸板，将其中有阴影的 16 格切掉，剩下来的图形便无法用希腊十字架的五格骨牌来盖．但是 16 格并不是至少要切掉的格数．请问至

①上文中的骨牌英文名字是 Domino．其中的‘do’有‘二’的意思．多方格骨牌是从‘polynomino’译过来的．这种骨牌的面积是两个方格以上．——译注

② Solomon W. Golomb of University of Southern California.

③ *Polynominoes*，1965 年出版．

少要切掉多少格？

棋盘分切问题还有一个至今仍然没有完全的答案.那就是一张 8×8 的棋盘有多少种沿方格边分切的方法使分割后的图形各为原来的一半？它们不但大小一样而且还可以完全吻合地重叠在一起.英国的数学游戏大师杜丹尼①先生最早提出这个问题.根据他的报导他发现这个问题‘相当棘手”,无法将所有的解全部列出【188】来 一个 2×2 的棋盘显然只有一种切法，那就是一割两半.3×3 的棋盘无法分割成两个全等的图形（因为棋盘的总格数是奇数），不过若是先把中心的方格挖掉，那也可以一分两半.分法只有一种.

4×4 的棋盘则要费点思考.不过也不难发现恰好有 6 个解（见图 86）. 这 6 种分切法，经过各种旋转和镜像运作，当然也成为一种分割法，所以这些都不能看作是不同的解. 杜丹尼先生又

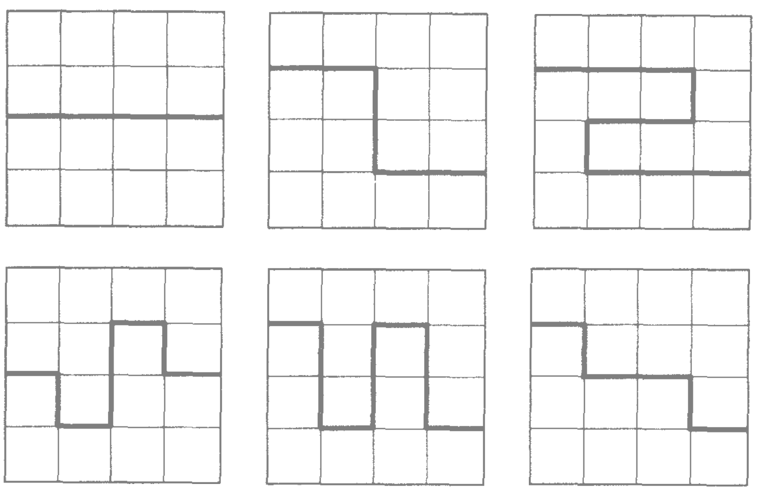


图 86　平分 4×4 棋盘的六种方法

① Henry Ernest Dudeney.

指出 5×5 的棋盘(先将中心一格挖掉)有 15 种不同的分切法.6×6 的棋盘有 255 种不同的答案.他的工作也到此为止.利用电子计算机应该不难找到 7×7 或 8×8 棋盘的分割法.但是我还没有听见过有人用电子计算机来回答这个问题.

格罗斯曼先生①是纽约州的一位数学教师，他最早提出下一个问题,与上面所讨论的问题十分相似.那就是如何将一个正方形的棋盘切成全等的 4 块?和前面一样,这 4 块不但同形,其面积以及‘手向’也都相同②,棋盘上各小格的颜色不必考虑.2×2 的棋盘显然只有一种切法分成四块.3×3 的棋盘，先将中间的一格挖掉，【189】也只有一种切法.那么 4×4 的棋盘呢？读者应该不难发现各种可能的切法.或许有些读者会找到 5×5 棋盘(中间一格先挖掉)的 7 种切法.(偶数×偶数的棋盘，以及挖了心的奇数×奇数的棋盘都可以分割成全等的 4 块.原理是偶数×偶数的棋盘方格数可以被 4 整除,而奇数×奇数棋盘的格数用 4 除余数是 1)6×6 棋盘共有 37 种分割法.解答的寻求并不必借助电子计算机.和前题一样，7×7 和 8×8 棋盘的分割法还没有答案，真希望哪里一架有空闲时间的电子计算机能在这个问题上花点时间.

不论是一切为二或一切为四，这些问题都可以推广到三维空间.不过分析的过程要复杂得多.就连最简单的 2×2×2 的方块也颇麻烦.许多人以为只有一个方法可以将它平分为二（当然切的方法只限于沿着方块的面而切）.可是实际上却有 3 种切法(读者可以想得到吗?).一切为四则有两种切法.至于 4×4×4 的方块，如何一切为二，或切成四块，据我所知，恐怕没有人有任何头绪.

在这些棋盘上放上一些各种不同的棋子之后，那么棋盘上的

① Howard Grossman.

② 就是说互为镜像的两块不算全等.——译注

各种可能的游戏真是千变万化了！举例子来说，在一个 n 阶的棋盘上(所谓 n 阶棋盘就是每一边有 n 格的正方棋盘）可以放多少个皇后棋使得没有一个皇后棋会被另一个皇后棋吃掉？大家知道，皇后棋可以前后、左右走许多方格，也可以在对角线上走任意多步．所以这个问题换一个方法来说就是说不论是同一横排、同一纵列以及同一对角线上都不能放两个皇后棋，如此的条件之下，一个棋盘上可以放多少个皇后棋呢？很容易看到棋盘上不可能放上多于棋盘阶数的皇后棋，而且当 n 大过 3 时,每个 n 阶棋盘上都可以放上 n 个皇后棋，这已经是有了证明的．

如果不把旋转和镜像的排列看作是不同的图形，则 4×4 的棋盘上只有一种方法放上 4 个皇后棋．5×5 的棋盘上有两种方法放上 5 个皇后棋．6×6 的棋盘上却只有一种方法放上 6 个皇后棋．（以上所讲的各种排法，读者或许有兴趣去找找看，尤其是 6×6.【190】因为许多厂商用 6×6 棋盘做各种单人玩的游戏)7×7 的棋盘有 6 种放 7 个皇后棋的方法．8×8 有 12 种，9×9 有 46 种，而 10×10 则有 92 种．(到目前为止,还没有任何公式可以用来计算 n 阶棋盘有多少种方法放上 n 个皇后棋）当棋盘的阶数不能被 2 或 3 整除时，那么可以将 n 种排法重叠地摆在棋盘上，并且把棋盘摆得满满的．所以 5×5 的棋盘上可以摆上 $5\times5=25$ 个皇后棋——五种颜色,每种五粒——凡是颜色相同的都不能互吃．

在图 87 中,我们将 8×8 棋盘上放 8 个皇后棋的 12 种布局全部列了出来．这个问题也被称之为“八后阵”．自从德国的白塞尔先生①1848 年第一次在柏林某一时报上发表专文之后，接着出现了许多的文献讨论这个问题．瑙克先生②所提供的 12 个解答发表于 1850 年．这 12 个答案是不是所有的答案呢？这不太容易证明．

① Max Bezzel.

② Franz Nauck.

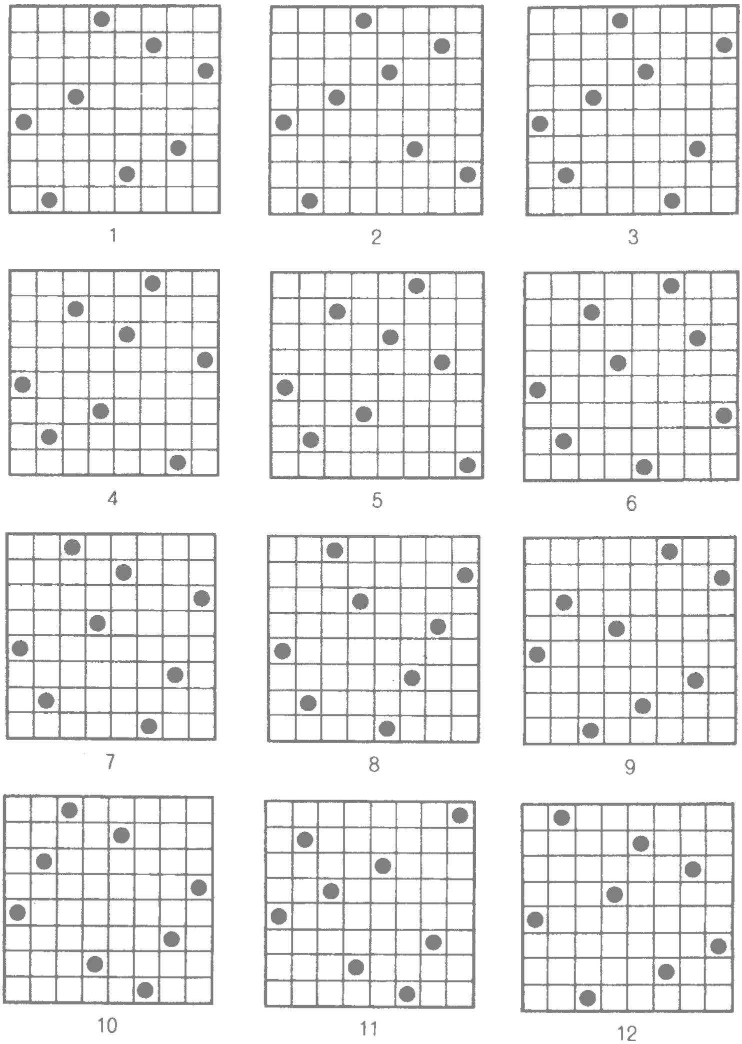


图 87 八个皇后棋的 12 解

直到 1874 年格拉希尔先生①终于用行列式找到了证明，发表于 12 月份的《哲学杂志》②上.

除了第 10 解之外，其他的 11 个解都可以利用旋转或镜像而得到另外 8 个解. 第 10 解，由于它的对称性只有 3 个变化，所以总计共有 92 解. 第 10 解还有一个特点，那就是没有一个皇后是在最中间的棋格上. 同时也和第 1 解一样，两条主对角线都没有皇后棋. 最有趣的是第 7 解，它的特点是没有任何 3 个皇后棋是在一条直线上，而在其他的各解中，总有 3 个或 4 个皇后棋是在一条直线上（这里所谓的直线并不是正方形的任何对角线，而是说与方格的中心可以用直尺相连的直线）. 读者可以试着在其他各解中找出以直线相连的 3 个或 4 个皇后棋，既可验证上面的说法也可用以自娱. 有时，一些热衷于此的专家们常常说他们找到其他没有三后共线的解. 其实只要仔细地检验,这些所谓的‘别解’都是第 7 解的旋转或镜像的变型而已. 顺便要提一提的是,好久以来大家都以为‘八后阵’的各解中,皇后棋都不会放在棋盘的角落上. 其【191】实图 87 中可以看到棋盘角上有皇后棋的解共有 2 个. 而且在这些解中，皇后棋若是在外缘的那一排，它一定是在离开棋盘角的第 4 格上.

除了用皇后棋之外，也可以用其他的棋子. 拿车来说,它和皇【192】后棋一样，n 阶棋盘上可以摆 n 个不互相攻吃的车. 若是多过 n 个，则至少有一列上有两个能互相攻吃的车. 还有一个方法,就是在主对角线放满车. 如此的摆法共有 $n!$ 个(即 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$). 在这么多摆法中，有哪些是来自旋转或镜像是很难决定的. 哪怕阶数仅仅为 8 的 8×8 的棋盘中，到底有多少是基本的不同的解,至今尚不能决定.

① J.W.L.Glaisher.

② *Philosophical Magazine*.

若用象则最多可以放上 $2n-2$ 个.在一个棋盘中，朝某一方向的对角线有 $2n-1$ 条.其中两个只有一个小方格，这两个小方格上不可以同时放象.这一放等于是将两个象放在朝另一个方向的主对角线上了.故而最大值被减低为 $2n-2$.所以在标准的 8×8 的棋盘上,最多可以放上 14 个象.它们彼此都不能互相攻吃.杜丹尼先生说,这 14 个象共有 36 种本质上不同的摆法.在 n 阶的棋盘上有 $2n$ 种不同的摆法.但是和车一样，这里面哪些是由旋转而来,哪些是镜像很难分辨.布放个数最多的象的方法之一，是先将 n 只象放在最上一排，最下面一排除了两个角落之外再放 $n-2$ 个象.

在边格数为偶数的棋盘上，可以布放 $\frac{n^2}{4}$ 个王棋.在边格数为奇数的棋盘上，则可以布放 $\frac{(n+1)^2}{4}$ 个王棋.布放的方法之一是将各王棋排成一个方阵，但两个王棋之间空一个小格.在 $n\times m$ 的棋盘上，这些王棋的布放一共多少种可能性相当难于决定.直到 1966 年才由法贝尔先生和坎普先生①共同计算而得.在一个 8×8 的棋盘上，包括旋转对称和镜像反射在内,16 个王棋共有 281 571 种不同的布放法.

至于马，由于它的走法奇特被杜丹尼先生称之为“最不守规则的活宝棋”.马可能比别的棋子更难分析.8×8 的棋盘上到底可以 [93]布放多少彼此不相攻吃的马？而且又有多少种不同的布放法？

增注

将棋盘平分为二或四等分的方法引起许多读者的兴趣.例如塔斯克先生和帕登先生②在没有电子计算机的帮助之下，各自单

① Karl Fabel & C.E.Kemp.

② R.B.Tasker & William E.Patten.

独地证实了杜丹尼的猜测，说 6 × 6 的棋盘有 255 种不同的平分法. 墨卡锡先生①在史坦福电子计算中心②叫他的几个学生写出计算七阶和八阶棋盘平分法的程序. 1962 年 11 月,他把计算结果寄来给我. 七阶棋盘有 1 897 种平分法，而八阶棋盘则有 92 263 之多的平分法. 据我所知，这些都是最早公布的数据. 后来又有福勒先生和哥佛夫妇③寄来了他们的程序证实了这两个数据. 1963 年荷兰的克拉仁何夫先生④说 9 × 9 棋盘的平分法有 1 992 653 种，而 1966 年马斯先生⑤说十阶棋盘的平分法有 213 207 210 种之多！1968 年科尼里孙先生⑥用 GE 635 GECOS 计算机花了 22 分钟的机器时间证实九阶棋盘平分法的数据.

史坦福计算中心的计算程序的细节我没有资料. 福勒先生说他的方法所依据的原则很简单. 他说每一种平分的分线，一定会经过棋盘的中心点，而且被此中心点分割的两段也必须对此中心对称. “这个程序正好像老鼠陷人迷宫一样,”他叙述道“它本来在迷宫的正中央，一次走一格地前进，凡是可以向右转的地方，它就向右转. 如果又回到已经走过的路径，就退后一步，向左转 90 度之后再前进走到边缘. 这便算找到了一个答案. 此时，又退后一步向左转再前进. 照这个方法做，最后就会找到所有的答案. 由起点开始一直到棋盘边，将所有这些通路全都印出来，便得到全解.”

上面所讲的“倒退法”只能用在偶数阶的棋盘上. 挖了心的奇数阶棋盘就麻烦多了！

① John McCarthy.
② Stanford Computation Center.
③ Bruce Fowler and Norwood & Ruth Gove.
④ Kraaijenhof.
⑤ Robert Maas.
⑥ Michael Cornelison.

至于将棋盘分成四等分，1962 年朗曼先生①在他写的《戏玩数学》②一书 127 页～128 页列出了四分 6×6 棋盘的 37 种方法．而格拉汉先生所写的《数学问题妙解》③一书中 164 页～165 页，包括旋【194】转对称和镜像反映在内，一共载了 95 个解答．摩尔先生④是最早找到四分七阶棋盘的 104 种方法(他没有用电子计算机)，也是唯一一位找到四分八阶棋盘的 766 个解答的读者．英国的格兰雷先生⑤也没有用计算机，独立地得到所有四分七阶棋盘的答案．同时里德先生利用他和派克先生⑥所写的程序，独立地验证了四分七阶棋盘的 766 个答案．

为了满足对‘八后阵’特别有兴趣的读者，我在本书的最后介绍了好几本我所知道的参考书，叙述它的渊源、问题的推广和一些值得知道的花边消息．阿仁先生⑦的书可能我写得最详尽．他将十三阶以下各棋盘的“n 后阵”之基本的解答及其总数都列了出来．更大的棋盘全部答案的总数我听人说起过，但是十四阶棋盘上本质不同的答案到底有多少，我至今尚未得知．

卢希保先生⑧特别告诉我说他知道一个漂亮的证明，说八阶棋盘上的‘八后阵’的 12 个解，即使重叠起来也无法完全填满棋盘的 64 格．这个证明来自高塞先生⑨，刊登在 1914 年 7 月份的《数学信使》⑩，44 卷 48 页上．先将 8×8 的棋盘画在纸上．将四条边上的

① Harry Langman.
② *Play Mathematics*.
③ L.A.Graham, *Ingenious Mathematical Problems & Methods*, 1959 年出版.
④ John F.Moore.
⑤ W.H.Grindley.
⑥ John Reed and Charles Peck.
⑦ A.Ahrens.
⑧ Warren Lushbaugh.
⑨ Thorold Gosset.
⑩ *Messenger of Mathematics*.

最中间四格涂上颜色,然后将中间 6×6 正方形的四个角落上也涂上颜色.现在仔细地察看那 12 个解答.你会发现,每个答案之中至少 3 个皇后棋是放在这 20 个有颜色的方格上.所以如果有 6 个以上的答案重叠在一起，这 20 个有颜色的方格至少要放 21 个皇后棋.这当然是不可能的.

“八后阵”问题还有一种有趣的变化,那就是假定皇后棋也可以像马棋一样走马步的话,那么 n 阶棋盘上放不放得下 n 个互不攻吃的“超级皇后棋”呢？在八阶或八阶以下的棋盘上，这个问题没有解.九阶棋盘上也没有解.阿根廷的郎先生①曾仔细地检验了十阶棋盘是的 92 个“八后阵”之解,发现有一个互不攻吃的‘超级十后阵”,并且说这是独解.读者有没有兴趣一试身手呢？【195】

在标准的棋盘上要放下最多互不攻吃的车，有两位读者在 1962 年互相独立地找到了答案.他们是史密斯先生和查恩雷先生②.两位在没有电子计算机的助力之下，找到七阶棋盘上 5 282个基本答案，八阶棋盘的基本答案的总数是 46 066.而且查恩雷先生说九阶棋盘的基本答案之总数是 456 454.据我所知，这个答案至今并没有得到确认.我在参考书目中也列出了一些有关车的书籍.从二阶到七阶，本质不同的基本答案数各为 1，2，7，23，115 和 694.

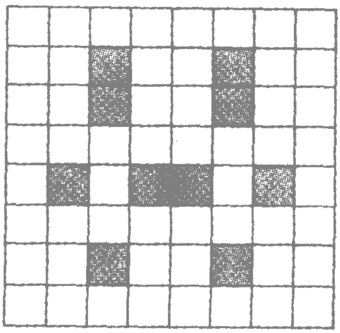


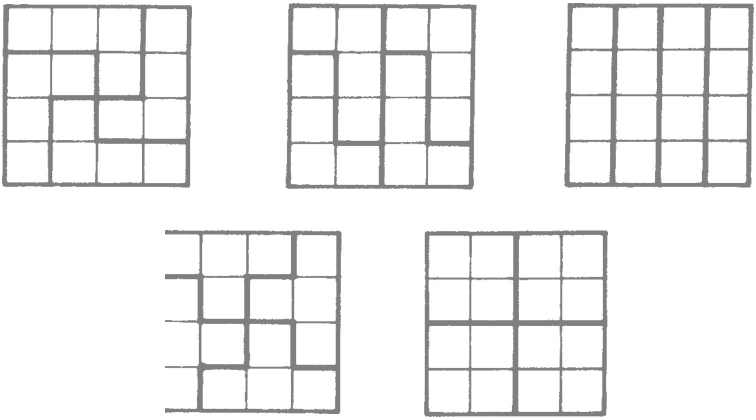
图 88 十字架问题的一个解

答案

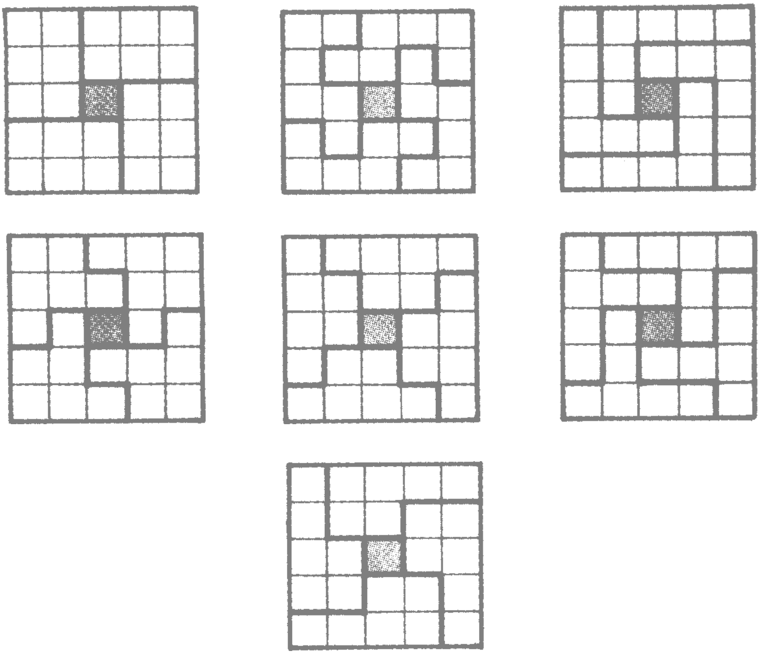
8×8 棋盘至少要切掉 10 格才无法放下由五格骨牌做成的希腊十

① Hilario Fernandez Long.

② David F. Smith and Donald B. Charnley.



将 4×4 的棋盘分成四等份



将 5×5 的棋盘分成四等份

图 89

字架 . 图 88 中的答案是里昂斯先生所提供的 .

4 × 4 棋盘的四分法不超过 5 个 ,如图 89 所示 . 把第二解的一半作镜像反映，也会得到一种四分法，但所得的变体中有两块与另外两块的‘ 手向 ’不同 . 5 × 5 棋盘（中间一格先挖掉）的四分法有 7 种 ,也如图 89 所示

标准棋盘上最多可以放上 32 个互不攻吃的马棋，因为这 32 个马棋只要放在同色的棋格上就行了 . 有一位汤普孙先生报导说，某一个国际象棋棋会的会员在某一个旅馆里聚会讨论这个问题时，因为争论声音太大，旅馆里值夜班的公安人员只好去请警察来把这些棋友从大厅里赶走！

第 17 章
绳子把戏

"金小姐蹦蹦跳跳地进了我们的大杂货店…… 一 屁股坐在喝饮料的柜台前面.一 身白色袒胸露背的晚礼服，她让肩膀上的黑披风滑落下来……双手向上举，手上有一段绳子圈"

这是一位贝瑞先生①所写的一本侦探小说的开场白.让金小姐开始对原始民族的绳子戏发生兴趣的是一位哥伦比亚大学的人类学教授.此后她就时时练习，准备在夜总会里表演.她的演出是一面讲些逗人笑的趣事，一面快速地将手上的一段金黄色的绳子做出许多图案来，让人眼花缭乱.

日本的折纸游戏，用一张小小的纸折出许多不同的东西.它的吸引人之处就在于它的变化无穷.和它一样，一段小绳子也可以做

① Jerome Barry.

出许多不同的花样和好看的图案. 这就是它的娱乐价值所在. 所用的绳子大约是 6 英尺长,两端打了结. 说起来,它就是所谓空间里【198】的一段封闭简单曲线①，其长度以及各种拓扑性质是仅有的不变量. 假如不要太挑剔的话，绳子戏可以说是潇洒的拓扑学.

绳子戏大致可分为两大类 第一类可称之为收放术,第二类是做图案. 在收放术的绝活里，有时这绳子似乎将某件东西缠得紧紧的,可是不知怎么一拉动,被捆得紧紧的东西就被释放出来,使观众叹为观止. 反之，有时一段绳子会不知不觉地捕捉到某件物品. 常玩的戏法有，将绳子从钮扣孔里拉解出来，或是将它缠在手臂上,脚上,脖子上甚至鼻子上,可是一拉之后又松开. 有的人会把绳子一道一道地缠住一个手指，可是几经玩弄之后就拉开了. 有时缠住左手的几个手指,似乎成了死结,这么一拉就打开了. 好些花会里玩绳子戏的人，将一段绳子做出某些圈圈图案摊在桌上. 观众可以将手指套在圈圈中间，然后打赌说玩戏法的人能或者不能将绳子拉松. 其实不论你手的指怎么放，玩戏法的人总是赢家. 那时,这个戏法就称之为‘ 袜带计 ”,因为那时男人流行穿长袜,所以常用的吊袜带也就是玩这个戏法的道具.

将一段绳子先绕三次，做成有 8 股的小圆圈，大约 3 英寸长左右直径. 将两个食指放在小绳圈里,手指上下相对旋转,见图 90 之 1. 停下时手指的相对位置如图 90 之 2 所示. 然后将拇指尖和食指尖相碰,如图 90 之 3 所示. 这时将右手向下移，直到四个手指全碰在一起,如图 90 之 4 所示. 然后右手的拇指碰到左手的食指而左手的拇指碰到右手的食指（不要让观众看到这一点，因为这正是整个戏法的窍门）. 现在左拇指按住右食指，右拇指按住左食指,然后将右拇指和左食指提起来,如图 90 之 5 所示. 这个小绳子圈就已经套在下面的左拇指和右食指上了. 现在将绳子稍稍

①所谓简单曲线，就是自己不相交的曲线. ——译注

向前抖动一下（但是两个拇指和食指形成的圈不要动），小绳子圈便和手指分离了.这是绳子收放术里的一个戏法，看的人每次【199】都会感到惊奇.

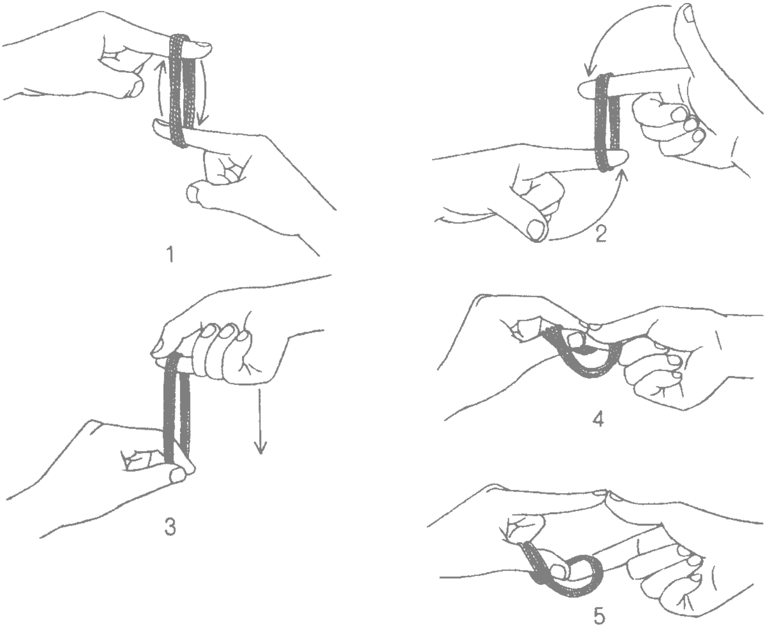


图 90　绳圈的手指分离的戏法

如果你请观看的人也来照做一次，他会感到十分为难.许多人都以为两个拇指是碰在一起的，也以为两个食指也是碰在一起的.按这个想法，这绳子圈是抖不开的，除非把拇指和食指所形成的小圈打开.但是这是不允许的.各位事先要多多练习，做起来又快又不会出错，而且每一次都能成功.但是其他的人却一直做不成.

另外一种完全不同的收放术是将套在绳子中间的指环释放出来.请一位观众伸出双手，两个拇指直立.在他左右手的拇指之间，套上一个绳圈，绳圈穿过指环如图 91 所示.

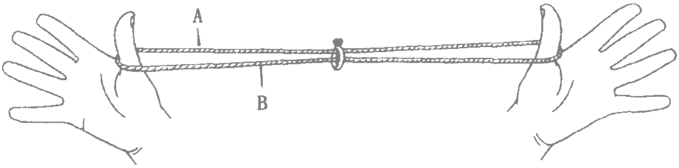


图 91 释放指环的戏法

要将这个指环放出来的方法有许多. 下面介绍其中最简单的一种. 伸出你左手的食指压在两股绳圈的 A 点之上,在 B 点用你的右手拿住靠近你自己的那一股绳子. 将绳圈向左拉向观众所伸出来的右手拇指(也就是朝你自己的左边拉),从前面绕到后面. 你【200】左手的食指要紧紧地勾住两股绳子，并且让指环尽可能的向左边滑. 将指环右边上面的一股绳子拿住向上并向左拉，一直绕到观众的右拇指（这一次是由后向前拉）.

做到此处时,你暂停一刻,并且请表演的观众将左右手的拇指尖和左右手的食指尖轻轻碰在一起. 同时说明如此做是要保证绳圈不会从拇指上滑出去. 你用左手拿住指环，然后告诉表演的观众,当你数到三时,他要稍稍将绳子拉紧. 你数到三时,将你左手食指从绳圈上退开而当他的双手正要将绳圈拉紧时，指环也就被放了出来，绳圈却仍然套在他的两个拇指上. 跟开始时完全一样，甚至连扭都没有扭过(当指环正要放出来的时候,你可以将它沿着绳子向右滑动,看上去像是从他的左拇指上掉下来似的,虽然绳子仍然被拇指勾住）. 孩子们最喜欢这个戏法，特别是以为学起来很容易,学会了以后,马上可以在他的朋友面前炫耀.

各位学会上面的戏法之后,可能想学其他比较复杂的戏法,例如绳圈上放三个指环，而且把最中间的一枚放出来. 开始跟上面一样将第一圈绳圈绕在观众的拇指之间，同时让前两枚指环向左滑. 第三个指环留在他拇指旁边. 跟刚刚一样也是先抓着上面的一股绳子,拉到两枚指环的右边,不过要先穿过第一个拇指之后再绕到观众的拇指上去. 现在你可以拿着中间的指环，再像上面所讲的戏

法一样,将中间的指环放出来.有兴趣的读者不妨费点思考，看能不能找出相似的手法再将放出来的指环放回去.

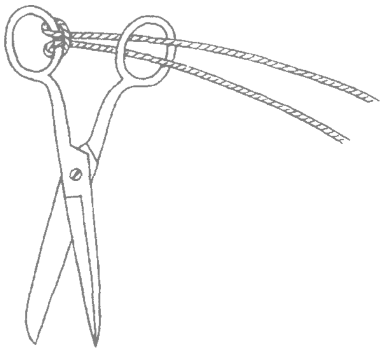


图 92　释放剪刀的戏法

图 92 是将指环从绳圈里放出来的另一个戏法.将绳子套紧在一把剪刀的半边上面，如图所示.绳子的另一端拴在一把椅子背上.问题是如何将这把剪刀放出来，绳子既不能割断，又不准解开.答案是太简单了.所以本章的答案栏里都不再写.读者不妨试试这看上去不容易的谜.

下面再介绍一个属于收放类的游戏.我相信没有人知道这个游戏，因为它是我刚刚才发明的.这游戏的道具是一个绳圈和一枚【201】硬币.先将硬币平放在桌面上.表演者拿住绳圈打结的地方将它拿起来，位置在硬币的正上方，而其下面一端正好碰到硬币.接着一松手，绳圈就掉下来，同时在硬币上面形成好些小圈圈.表演者可以拿出一支铅笔,笔尖顶在硬币面上任何一点.让铅笔在绳子的空隙间左右稍稍移动，可是不要使绳子的位置有太大的变动.就这样一只手移动铅笔，另一只手拿着绳圈上的结，将绳子圈向外面拉.这样拉的时候，绳子很可能捉住铅笔.假如绳子绕住铅笔便得 1 分,绕住铅笔 3 次,则得 3 分.如果完全没有捉到铅笔,便得 5 分.两个人玩,谁先拿到 30 分就算谁赢.

绳子戏的第二大类是用绳圈在双手之间做出许多不同的图案.绳子在早期原始居民的生活中是一件很重要的工具，所以这种绳子戏是原始文化中民间艺术的一部分.例如因纽特人用兽皮条做的绳子来玩，不知已经流传了几百年.更有好些原居民,玩这种绳戏的技巧已经发展到相当高深的程度.例如北美洲的某些印

地安人,澳洲、新西兰、卡罗林群岛、夏威夷各岛屿、马歇尔群岛甚至菲律宾、新几内亚各地的许多土著居民部落等等.几百年以来,这些土著——尤其是因纽特人,所获得的成果其巧妙精致的程度和东方民族或西班牙人的折纸术完全不相上下.他们发明了千百种的图形,有些是非常复杂,真无法知道如何用双手或手指将它们做出来.(这是从研究人类学的学者所作的图片上所印证的).专门做这些绳图的土著专家做起来很快.一般讲来只用双手,不【202】过有时也用脚趾,或嘴帮忙.他们一面做,嘴里还一面哼小调讲故事!

许多绳子做出来的图形,因为它们被想像成貌似某种动物或物品而得到某些名称.一些'好像是真的'图形还可以被拉动做些动作.手一拉,出来一道弯弯曲曲的闪电,或者夕阳缓缓下沉,或者小孩爬树,张嘴闭嘴,两个猎人争吵,一匹马狂跑,一条蛇从一只手到另一只手扭曲前行,一只矛被前后抛掷,一条百足虫在你大腿上爬,眼前飞过一只苍蝇,你甚至会伸手去打等等.一些不会动的静止图形有的看上去也逼似真实的东西.例如一只蝴蝶,会用一些绳子做成一根根螺旋似的触须.本文一开始时所提到的侦探小说里,每一个被谋杀的死者都有一个绳子图形在他们的手指上,或是在附近的一块纸板上.这些图形都是用来描写死者的身份或特性.

在美国和英国,孩子们最喜欢玩的绳子戏叫'勾线网'①.这种游戏的特别之处是它要有两人在一起玩.两个人将一个绳子圈勾来勾去,做出不同的网状图形.这种消磨时间的游戏以前一定是相当流行.有一位里斯曼先生②说:"武装部队的指挥官对步兵和飞

① 这是译者杜撰的名字,原文叫 cat's-cradle 很多的孩子们玩过这个游戏,各地所用的名字以及玩的时候所用的儿语也都不同 ——译注

② David Riesman.

行员说,最好身上带一段小绳子圈,一旦不幸被敌人困在太平洋的海岛上,可以玩‘勾线网’,一方面消磨时间,同时如果有当地的土人来,说不定他也会坐下来和你同玩."

有关绳线图形的书籍几乎和讨论折纸戏的一样多.早在 18,19 世纪，已有一两位作者在别的书里谈到消磨时间时顺便提到这种游戏.白莱船长在‘邦提号’①的航行日记中就说他看到大溪地的土人玩这种游戏.那是 1787 到 1790 年间（也正是有名的叛舰事件发生的年代）.兰姆先生②也写过他儿童时期玩这种游戏的回[203]忆.1879 年英国的人类学家泰罗先生③提倡说这种绳网图形的重要性是在于它能指出文化的线索④.1888 年,波亚斯先生⑤是第一个从人类学的观点将某些土著居民的绳网图形的细节写成专书的人.1902 年里维尔斯先生和哈东先生⑥将各种绳网图形的做法命名后编成一本书.自此之后,人类学的各种刊物,常常有专文讨论绳子戏，后来也陆续出了好些书.有一阵(1910 年左右）假如某人随身带有一段绳子，他很可能是一位人类学家.后来这种风气日渐式微，大家也觉得绳戏在人类文化的进展中所扮的角色并不如所想像地那么重要.如今，随身带着绳子的人多半是一位业余魔术家！

许多有关绳戏的老书大都已经绝版.美国的多维尔出版社⑦在 1962 年将各书中最重要的一部重印问世.这就是简茵太太所编的《绳网图形及其做法》⑧.全书约四百余页，有许多插图，加上详

①船名和船长名都是著名影片《叛舰喋血记》里的人物.

② Charles Lamb 英国名作家,姐弟二人合写《莎氏乐府本事》.

③ Edward Burnett Tylor.

④不禁想到“结绳而治”这句老话中的绳.看来是值得研究的.

⑤ Franz Boas.

⑥ W.H.R.Rivers and Alfred C.Haddon.

⑦ Dover Publications.

⑧ *String Figures and How to Make Them* by Caroline Furness Jayne.

细的做法说明，收集了百种以上不同的图形，对此有偏好的人可以引为借鉴.绳戏艺术如今已不大为人所知，这实在是值得惋惜的.不然，老师可以用来带孩子们玩，护士们可以给卧床的病人作消遣，心理学家们甚至可以用来做心理治疗.

这里我要介绍最简单的也可能是众所周知的“四角方块图形”来吊吊各位的胃口.简茵太太称这个图形为“阿撒吉钻石形”①,因为最先将这图形介绍给她的就是一位俄克拉荷马州的阿撒吉印地安人.另外一个大家常用的名字是“雅可比的梯子”②.做这个图形要用一段6尺长左右的软绳子，两端结在一起.试试看能不能照做.熟练之后,可以在10秒钟之内就做好.

一开始，和做其他的图形一样，将绳圈绕在两手的拇指与小指之间,如图93之1所示.用右手的食指的指尖，挑起左手拇指与小指之间的绳子，挑起之后再向右边拉.接着用左手的食指依法炮制，并把拉起的绳子从已套在右手食指上的绳子中间穿过.此时所【204】成的图形如图93之2所示.现在将两个拇指从绳网中抽出来，并且将绳网拉紧如图93之3所示.

现在可以稍稍将手掌向外转，以便用两个拇指的指背勾住最外面一段绳子上注有‘A’的地方.勾上之后两个拇指同时向后拉，把勾住的这一段绳子拉到所有绳子的最底下，如图93中之4所示.再用拇指指背去勾上图4中注有A的地方,勾好之后就将小指从绳圈中松开.此时的图形如图93之5所示.

弯下小指,也是用指背去勾住图93之5的A点,勾好之后就拉上来,同时放开拇指,图形就成了图93中之6所示.现在用拇指指背去勾住图93之6的A点,勾好之后向后拉,图形则如图93之7所示.

① Osage Diamonds

② Jacob’s Ladder.

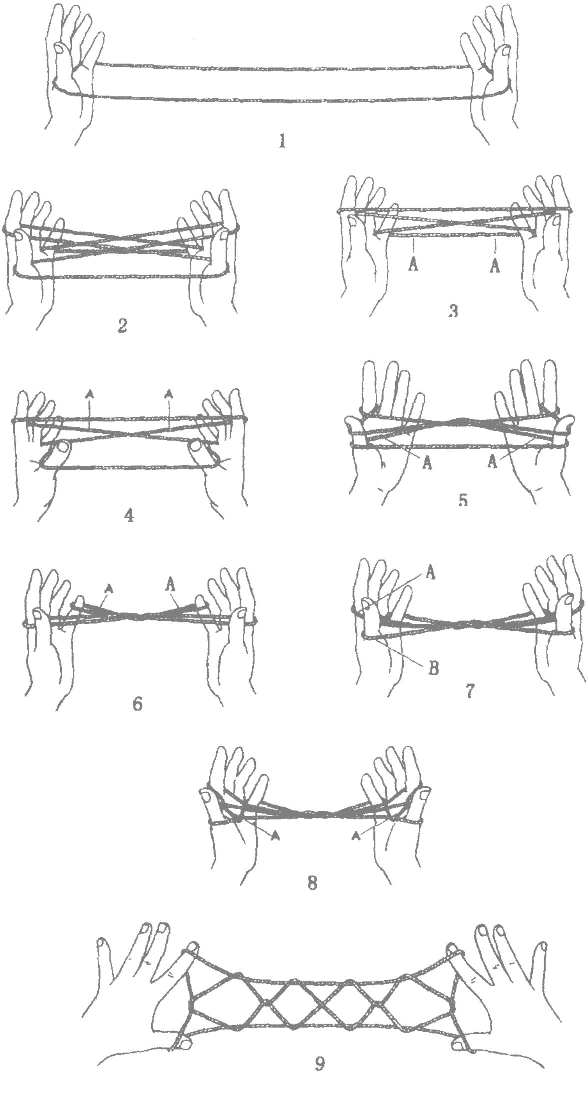


图 93 **雅可比的梯子的做法**

现在用右手的拇指和食指同时拿住图 7 中的 A 点.拿住之后，向自己身前拉,并且将这一段绳圈绕在左手拇指上面,左手拇指上原有的一段绳子在 B 点是面向上提，超过拇指上面之后再放掉，这一个步骤称之为“拿佛和换圈术”.因为拿佛和人常用这一段小动作来做各种图形.右手做完之后再用左手的拇指和食指照样做一次“拿佛和换圈术”（玩绳戏玩得很熟练之人可以两手同时换圈，不过初学的人最好还是分两次做）.到此为止图形应该如图 93 之 8 所示.

如今只剩下最后一步了！将两个食指稍稍弯下来，指尖放在图 93 之 8 的 A 点的小三角形上.一面放掉两个小指,一面将手掌向外转并且将食指高高地跷起来（做最后一步时，绳圈要尽可能地放松,太紧的话图形可能展不开),此时才将绳圈拉直.如果每一步都做得对，最后所得到的图形应该是和图 93 之 9 一样,出现了好几个四角方块.前几步看上去紊乱无序，最后展开的图形是非常醒目的.

[206]

如果有两位个中能手，绳圈可以一端套在甲的左手，另一端套在乙的右手，甲乙两人可以同时做这个图形.再不然,四个人分成两组，也可以做出两个完全相同的图形.比较难的是两个人各出一只手，同时很快的勾来勾去，最后做出来的却竟然是两个全然不同的图形.这需要高度的技巧和合作.

图 94 是一张谜语卡片，中间隐秘地包含着一个向人致意的词句.本是法国名诗人阿拉贡先生①写的一首诗,名叫《自杀》,写的时候还是作家早期对超现实主义相当倾爱之时.神志沮丧的人眼中的世界就是这样，生命中美好的事物全被滤掉，剩下来的只是些毫无意义的僵死的符号而已.我认为这首诗正是象征这种人生观.当我细细地咀嚼这首诗时，我发现阿拉贡不知不觉地在其中放进

① Louis Aragon.

了许多由两个字组成的警句.在这个核子军备竞赛的时代里，这些警句是非常合用的劝世文.我们要去找这些短句,可以把铅笔放在图中任意一格的字母上,然后左,右,上,下或对角按格前后移动到相连的邻格来拼出一些英文字.（有些字母为了正确拼音的需要可[107]连用两次)例如 stunning 或 no onions 等等.图中的元音字母似乎很少，但是也能写出不太短的句子.例如‘no point to hide'(无处藏身）和‘put UN on top'(尊重联合国)等等.我刚刚提到的两个字所做的短句，对这个互相残杀的世界来说特别用得上，而且所指的又相当的模棱两可.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	
	g	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*
	m	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*
	s	*t*	*u*	*v*	*w*	
		x	*y*	*z*		

图 94 阿拉贡的‘自杀'诗

增注

本文一开始时，提到贝瑞先生在他的侦探小说中讲起绳子戏.我在 1962 年碰到他,那时他在一家广告公司里任职.向我说,自从他对绳子戏发生兴趣之后，就随身带一段绳子，一有空就拿出来玩.他又说，他对很多的朋友说过他正在把绳子戏写在一本侦探小说里.话说了太多次，不得不真的写一本有绳子戏的侦探小说.

1950 年间,他为侦探电视剧‘ 灯熄了 ’写剧本时也用到绳子戏,演主角的演员不会玩绳子戏,故而不得不事先替他做好,并且上了胶水使它固定不变形.开镜时，主角先做起初的一两步，所有的特写镜头全是贝瑞先生自己的手在做.快完的时候，再把事先做好的图形套在主角的手上.

有一位在加拿大教四年级的金老师①写了一封信给我，全文如下：

亲爱的加德纳先生：

“ 阿撒吉钻石形 ’以及英文字 charge 在我的心里留下一种无法摆脱的谦卑之情.这些全都是由于你所写的绳子戏而来……

我在一个印地安人保留区里的学校里教四年级.绳子戏应该是可以马上引发学生们的兴趣.我又从来未看到学生玩过,所以有一天我就做了一个小小的‘ 勾绳网 ’教幼年学生玩.这些学生们有一点反应，但是他们的兴趣不能持续下去.(他【208】们是来自加拿大北部育空地区内地，并不一定来自某个特定的部落，除了英文之外，其他的土话一种也不会）我曾花了不少时间和精力学做‘ 阿撒吉四角方块 ”,成绩并不太好,让我非常气馁.做出来的有点像,但又不全对.后来我渐渐有点进步，但是指尖的操作仍然不灵.本来想自己学会了再教给学生.一想自己都觉得这么难，一定也教不会学生，所以这个念头就打消了.

一个月之后，一堂闷热的下午课，我教得也不起劲.那时正教一个英文 charge 的拼音,课就老停在这个字上,顺便让同学讲讲这个字的含意.开始时大家对‘ 攻击 ’或‘ 负责任 ’等含

① A. Richard King

意都不觉得太难 . 可是讲到这个字也有‘ 刷卡 ’或‘ 挂在信用卡账上 ’的含意时,好些同学就分辨不清如此的用法 . 因为大家都认为买东西一定得马上付现金 .

有一个成绩好的女同学，每当其他同学有难处时，她总可以很快地领悟到 . 这时她拿了一小段毛线在手上勾来勾去，最后手这么一晃一个“ 四角方块 ”就在她手上出现！这个瞬间一直留在我的脑海里无法忘怀 . 那时我说了些什么现在已经不记得，只知道完全没有责罚的意思，或许只是想知道她的技巧是从哪里来的 .

同学们看到我对这个不值一提的小玩意如此有兴趣都感到诧异,这使我大吃一惊 . 这有什么了不起，全班同学都会！当天下午的课当然也就无法进行了 . 如果老师对绳子戏有兴趣，那么我们有好多东西来教教他 . 当天下午，我看到了许多图形,例如‘ 扫把 ’;‘ 茶杯 ’;‘ 秋千架上的小孩 ’以及其他各种各样“ 方块四角图形 ”的变化 . 大家玩了整个下午 . 教室是谁 in charge 根本无人理会 .

同学们是从大孩子那里学会的 . 有些成年人仍然记得他们小时候玩过这些游戏，但是跟我交谈过的成年人都不再记得做这些游戏的技巧 . 可是他们全都说只要再练习练习一定能再做 . 这不是什么了不起的玩意，只不过是孩子们的玩意儿而已 .

你的文章里的那个“ 四角方块图 ”只是孩子们所玩的图形之一 . 他们用的名字也比较简单 :什么‘ 两方 ’;‘ 三方 ’;‘ 四方 ’等等 . 他们一直可以做到“ 六方 ”. 这些数字所指的是图形做好后有几个四角方块 .

附上照片一张 ,照片里是一位同学正在做‘ 两方 ’;‘ 四方 ’和‘ 扫把 ’. 你说不到十秒钟便可以做好这些，这话一点没有错 . 至于你说两个人各出一手一同做，孩子们从来没听说过，

但是马上就可以做得驾轻就熟，而且玩得很开心……

谢谢你给我带来这么有趣的一个经验.

答案

原文中的‘答案’栏全部是讨论文中所提的谜语卡片.在美国，许多人喜欢这种文字游戏.每天早上坐交通车或火车上班的人有一大半是在玩填字游戏.对我国的读者来说，这些英文字的游戏几乎是毫无意义的.因此,译者大胆地将全栏删去,敬请原谅.

第 18 章
定宽曲线

假如要将一个很重的东西从一处移到另一处，用轮子来运有时会不切实际.因为有时东西太重，轮轴会弯甚至会断.取而代之的方法是将一块平板放在两个圆柱形的滚木上，然后将平板向前推，一面推一面将留在后面的滚木拿起来放在平板下面再推.

用滚木和平板来运东西，所运的物品不会上下颠动.理由很简单，圆柱形滚木的截面是一个圆.圆是一种封闭曲线而且数学家们称之为"定宽曲线"①.将一个封闭的凸曲线放在两条平行线之间，并且将这两条平行线渐渐移近,直到碰到凸曲线为止,这两条平行线之间的距离便是该凸曲线在某一方向的宽度.一个椭圆的宽度不是在各个方向都相等，所以木板放在椭圆形的滚木上，所运的东西会上下地颠动不已.一个圆的宽度在各个方向都是相等的,让它在两条平行线下面滚动，平行线之间的距离则始终不变.

① constant width curve

定宽封闭曲线是不是只有圆一种而已？许多人的答案都是肯定的.这可以看得出来人们在数学上的直觉会有多大的偏差，这就是一个标准的例子.定宽曲线实际上有无限多，它们每一个都可以用来作滚木的横截面，而移动沉重的物品时也都和圆柱一样四平八稳.在工业界里，因为看不出某些曲线是定宽，会引来极大的困扰和严重的后果.举一个例子,一艘潜水艇的艇舱,做成一半之后，大都要量量它各个方向上的最大宽度，以为这样便可以决定其圆环性.不久之后人们发现，尽管通过这种检察，潜水艇仍然有可能翻身.所以现在是用预先做好的曲线样板来量.

非圆形而是定宽的曲线最简单的一种称之为莱洛三角形①，这个名字是用它的发明人莱洛先生②的名字而起的.他是一位德国工程师及数学家,曾在柏林的高等工校教书.这个三角形早已被人所知，但是莱洛首先证明它的定宽性质.这个三角形也很容易做.先画一个等边三角形（见图 95）,以 A 为圆心画出 BC 弧,其他的两段弧也用同样的方式画出.很容易看出来这个“曲边三角形”（莱洛最先就是这样称它）是定宽的，其宽度等于内接三角形的边长.

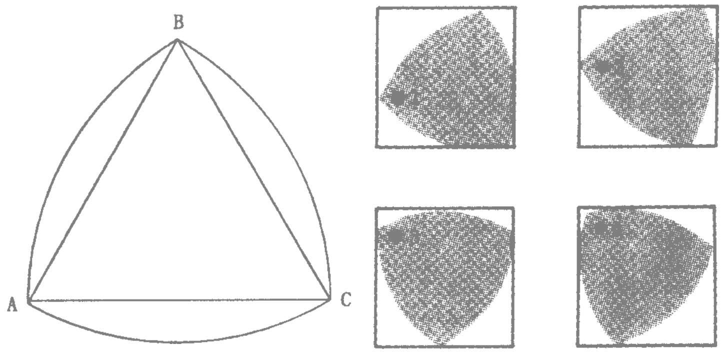
【213】

一个定宽曲线如果可以画在两组互相直交的平行线之间，这两组平行线一定会形成一个正方形.莱洛三角形、圆以及其他定宽曲线都可以紧贴地在正方形里旋转，并且时时都与这正方形的四边接触(见图 95).读者可以用纸板做一个莱洛三角形，另外又在纸板上切出一块尺寸合适的正方形，便可以亲眼看见这三角形在正方形中滚动时多么贴切.

当莱洛三角形在正方形之内旋转时，每一个角所走过的轨道几乎是一个正方形.只有在正方形的四角稍稍有点不服贴,那是因

① Reuleaux triangle.

② Franz Reuleaux.



莱洛三角形的做法　　莱洛三角形在正方形中旋转

图 95

为每一个角都不那么尖锐。这个三角形在机械工程中有许多可以利用的地方。但是最令人想不到的是用在瓦特先生①所发明的钻头上。瓦特是一个英国的工程师，当年(1914 年）住在美国的宾州。他所发明的钻头便是利用莱洛三角形的特性，而所钻出来的钻孔是正方形的。从 1916 年起，他就建厂开始制造这种钻头。“我们听见人说过给左拐子用的大扳手，也听见过用兽皮衬边的浴缸或生铁铸出来的香蕉等等，”该厂的宣传广告小册上写道，“大家都以为这些都是瞎扯，不可置信，谁会想到接着而来的是这种钻方孔的钻头？”

图 96 就是这种钻方孔的钻头。图的右边是钻头的横截面图以及它旋转时所钻出来的方孔。要钻孔的东西上面，先摆好一个方形【214】的铁模板。当钻子在这模板里旋转时，就会切出一个正方形来。大家可以看得出来这钻头本是一个莱洛三角形，不过有三个缺口，以便产生三个可以切割的刀口，而且钻屑也可以从这些缺口中流出来。钻子旋转时，钻头的中心会有点摇摆不定，所以卡住钻头的夹

① Harry James Watt.

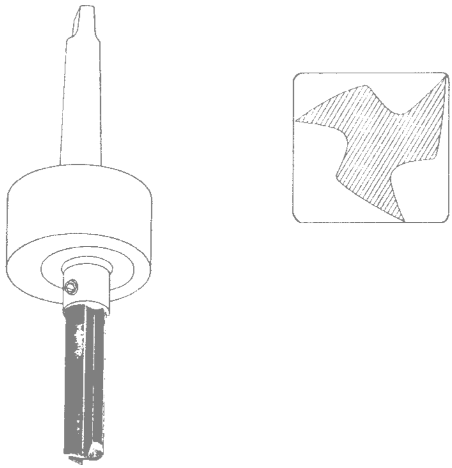


图 96 瓦特的钻头及其截面

盘要把这种摇摆不定的动作考虑在内．他们发明了一种“全部浮动性夹盘”来克服这种困难．(读者若对这个发明有兴趣,可以查看美国专利局专利第 1 241 175 号;1 241 176 号和 1 241 177 号等三个专利档案,日期是 1917 年 9 月 25 号)

在宽度相同的各种定宽曲线之中，荷罗三角形的面积为最小．(它的面积是 $\frac{1}{2}(\pi-\sqrt{3})W^2$,其中 W 是宽度)．这三角形的三个角是 120 度，也是这些曲线中角度最尖锐的一种．它的角度可以弄圆一点，方法是将原来的三角形的每一个边以等长向外延伸一点(见图 97)．A 为圆心先画 DI 弧，接着把圆规放宽再画 FG 弧,其他的两个顶点也照做一次．所得到的曲线其宽等于两个半径之和，所以也是一

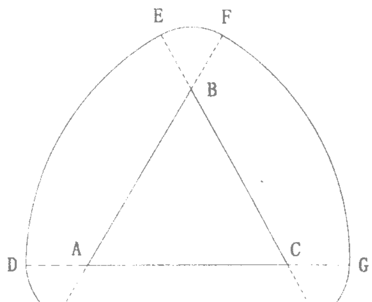


图 97 对称而且没有锐角的定宽曲线

个定宽曲线.用一个正五边形（或任何奇数边的正多边形）都可以用相同的方法做出对称的定宽曲线.

不对称的定宽曲线也有好些方法可以做，其中之一是从不规则的多边形开始（边数必须为奇数),例如图 98 之中的七角形.多边形每边的边长必须相等.以多角形的每一个顶点为圆心，用圆规在它的对面的两个顶点之间画一段圆弧，这就是图 98 中的粗线所表示的曲线.

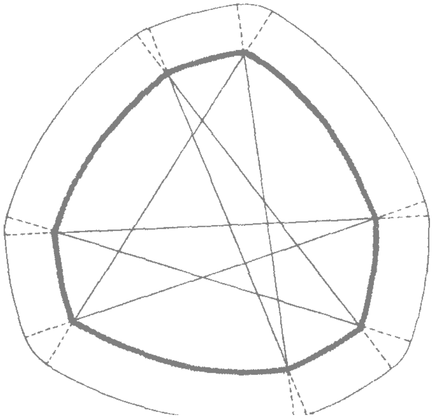
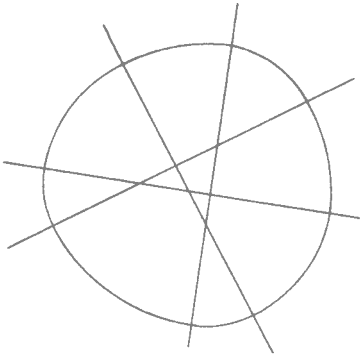


图 98 用多角星画定宽曲线

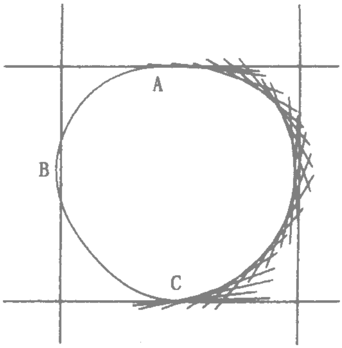
做成之后每一个顶点还可以弄圆一点，那就是将每一边以等长向外延伸一段等距离(即图中的虚线),再用圆规将一段段的圆弧加上去,如图中的细黑线所示.

图 99 又说明另一种方法.先画出许多直线，每根直线都和其他的直线相交.以每两条相交之交点为圆心画出一段圆弧与两段直线相连.画了这一段圆弧之后，以同法再作第二段圆弧使其与第一段圆弧相联结.只要画的时候很当心，所有的圆弧都会联结起来而形成一个封闭曲线，同时各方向的宽度全是一定的（各段圆弧会联结而且又是定宽是不难证明的）.以前做定宽曲线的方法，只是取自两个不同的圆上的弧而已，但是这个方法则是从许多圆上取不同段的圆弧.

定宽曲线不一定要用圆弧画成.让我们在一个正方形的上下边之间画一条凸曲线，与正方形的左边相接（见图 99）,这就是唯一一个未完成之定宽曲线的左半边.要完成这个定宽曲线必须用



用相交直线画定宽曲线



任意曲线及其切线

图 99

一根直尺，它的宽度要和正方形的宽度相等．用这把直尺的一边，沿着左边半个曲线的任何一点画一条切线，同时用直尺的另一边画一条与切线平行的直线，所以两者之间的距离等于正方形的边长．照上述的方法，从弧的一端到另一端，在不同的点上作出曲线的切线，同时又在直尺的另一边画出平行的线段．这些与切线平行的线段所做成的包络线①就是定宽曲线的另一半．用这样的方法可以做出无穷多个斜形的定宽曲线的大体形状．

这里要另加说明的是，ABC 这一段凸曲线实际上并不可以随意地画．粗略地说，在任何一点，该曲线的曲率不能比以正方形边长为半径所作之圆的曲率小．同时这段曲线不能有任何直线部分．这里要介绍拉德马赫和托普里兹两位所写的《品尝数学》②，书中介绍许多有关定宽曲线的初步定理及其详细的证明．

各位如果喜欢做木工，而且也有做木工的设备，不妨来做一些滚轴，其横截面都是不同的曲线但是宽度相等．一本大书放在如此

① envelope.

② *The Enjoyment of Mathematics*, by Hans Rademacher & Otto Toeplitz.

的斜形滚轴上却不会上下颠簸. 许多人看到这件事都会迷惑不解.

【217】还有一个更简单的方法演示这类的曲线，就是用厚纸板做两个定宽曲线，并且钉在一段六寸长木柱的两端. 两个曲线的形状不必相同(宽度却相等). 钉的时候只要大约在曲线横截面的“中心位置”就可以了. 然后放一个很大的很轻的空盒子，放在曲线上前后移动. 中间的那一段小木柱，看上去有点上下起伏，但是曲线上的空盒子却一直是平稳的，好像是在两个圆的滚轮上移动似的.

定宽曲线的各种特性已经被研究得很彻底，可是有一个惊人的特性却不容易证明，那就是所有宽度为 n 的定宽曲线其周长全是相等的. 圆是定宽曲线中的一种，它的周长是 $n\pi$ 故而凡是宽度为 n 的定宽曲线其周长也全是 $n\pi$.

定宽曲线在三维空间里的类似体当然是定宽立体. 圆球并不是唯一的一种可以在立方体之内旋转的定宽立体. 旋转之时,该立体要时时都和立方体的 6 个面有接触. 非圆球的定宽立体,最简单的例子当然就是莱洛三角形绕着任何一个对称轴旋转而生的立体(见图 100 之左图),除此之外,定宽立体也有无限个之多. 由正四面体所产生的定宽立体之体积是最小的，正好像由等边三角形所衍生的莱洛三角形乃是面积最小的定宽曲线一样. 先在这个正四面体的每一个面上放一个小圆球盖，然后四面体的每一条边便要稍加修改：或是改成曲面三角形，或是由四面体的顶点向外辐射，这就做成了一个定宽的曲面四面体，如图 100 中的右图所示.

【218】宽度相等的定宽曲线其周长也相等. 所以大家可能会以为宽度相等的定宽立体似乎应该有相等的表面积. 实际上却并非如此.

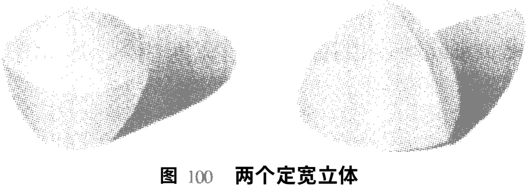


图 100　两个定宽立体

这是波兰大数学家闵可夫斯基①证明了的（这位数学家对相对论的贡献很大）. 定宽立体的投影一定是定宽曲线 .（投影时,光线要彼此平行，并且和投影面相互垂直）这些定宽曲线的周长也全相等（即 π 乘宽度）.

在海军部任职的工程师哥德柏格先生②发表过许多有关定宽曲线及定宽立体的论文 .他被公认为美国这一门数学里的领导人物 .任何一个可以在多边形之内旋转的凸曲线，或是在多面体内旋转的凸体，而且旋转时每时每刻都和多边形的边或多面体的面相接触，皆称之为回转轮(rotor) ,这个字就是他所提供的 .

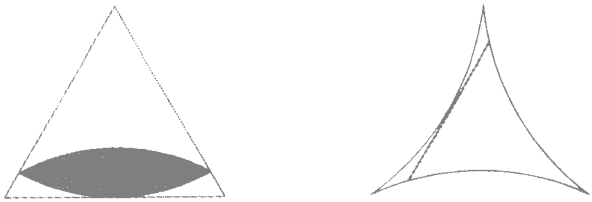
前文中已经说过，在正方形里旋转的回转轮面积最小的是莱洛三角形 .在一个等边三角形内的回转轮中面积最小的则如图 101 中左图所示 .它看上去像一个镜片 .它当然不是定宽曲线，它是以两个 60 度圆弧所组成 .圆的半径是等边三角形的高 .当它在三角形内旋转时，它的两个角会画出等边三角形的全部边界 .但是不能用它做钻头来钻尖锐的角 .加上其他机械原理的考虑,瓦特兄弟公司便用以其他正多边形为基础所做的回转轮作钻头，便可钻出有锐角的图形，例如正五边形、正六边形甚至正八边形的洞等等 .推广到三维空间，哥德柏格先生证明了非圆球型的回转轮也有许多种 .诸如四面体、八面体及立方体之内皆有对应的回转轮 .可是十二面体或二十面体之内就找不到回转轮 .在三维以上的空间里,几乎没有人做过工作 .

与回转轮十分相似的另一个有名的问题乃是所谓的挂屋问题 .他的创始人是日本人挂屋正一③，提出的时间是在 1917 年 .问

① Hermann Minkowski ,他是 19 世纪末 20 世纪初的大数学家 .与希尔伯特同在柯尼希堡大学共事，后来在苏黎世高等工业学校做爱因斯坦的老师 .最后又与希尔伯特在哥廷根大学共事 .

② Michael Goldberg.

③ Sôichi Kakeya.



等边三角形中的最小面积的回转轮旋转　　直线在三角形曲线中旋转

图 101

题如下：一段单位长度的线段，在一个平面图形内可以做 360 度的旋转，其有最小面积的这种图形是什么？很显然的，这段线可以在直径为 1 的圆里面作 360 度的旋转，但是圆的面积比正确的答案大得多.

很多年来，许多数学家一直认为三角形曲线①是正确的答案（参阅图 101 中的右图）. 它的面积是以 1 为直径的圆的面积的一半.（两个圆相接，小圆的直径为大圆直径的 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$. 小圆在大圆之内沿着大圆的圆周滚动，小圆上任何一点所经历之轨道便是三角形曲线可以做一个实验用一根长度适中的牙签，它可以在三角形曲线内旋转. 请注意，牙签的两端也始终和三角形曲线的周边接触，牙签可以说是一维的回转轮.

1927 年，也就是这个问题提出来之后的第十年，有一位俄罗斯的数学家贝西柯维其②——当时住在丹麦的首都哥本哈根——却带来了一个令人震惊的大消息. 他证明说这个问题是没有答案的. 说得更精确些，他的意思是说挂屋问题中所谓的最小面积的平方图形根本不存在，因为面积可以随意地缩小. 让我们假想有一段线段从地球一直通到月球，这段线可以在一个面积只有邮票那么

① deltoid curve.

② Abram Samoilovitch Besicovitch.

小的图形内作 360 度的旋转. 如果你认为邮票的面积还不够小,你可以说是在林肯先生邮票中他的鼻子里旋转.

贝西柯维其先生的证明无法在本文内介绍（请参阅书后的参考书目），而且这段线的旋转已经不是拓扑学中所谓的“单连通域”①之内的问题. 有些读者可能对较为简单的问题发生兴趣：若一段单位长度的线，可在一个最小凸曲线图形中作 360 度的旋转，这类图形中什么凸曲线的面积最小?(凸曲线的定义是,若把这曲线上任意两点以直线相连，则这段直线是完全在图形之内. 圆和正方形便是凸曲线，而希腊十字架则不是)

增注

虽然瓦特是第一个申请用莱洛三角形来钻方孔的人，可是钻方孔的方法似乎存在得更早. 伦敦的贝克先生②来信说，他记得【220】早在 1902 年做学徒时便已经用过某种工具来钻方孔，而且是当时大家都常用的工具. 可惜我始终无法找到早于 1917 年以前的资料.

答案

一段单位长度的直线在一个凸曲线的图形中可作 360 度的旋转，请问面积最小的这种图形是什么？答案：这个图形是一个等边三角形,其高度等于单位长度. $\left(\text{其面积为 } \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

任何一个图形，若能让单位长度之直线在里面旋转必须有一条边的长度至少为单位长度. 边长为 1 的凸曲线平面图只有高度为 1 的等边三角形的面积为最小. （请参阅雅格罗和波尔强斯基所

① simply connected domain.

② Derek Beck.

写的《论凸形》①一书）这段线在三角形内之旋转过程如图 102 所示.

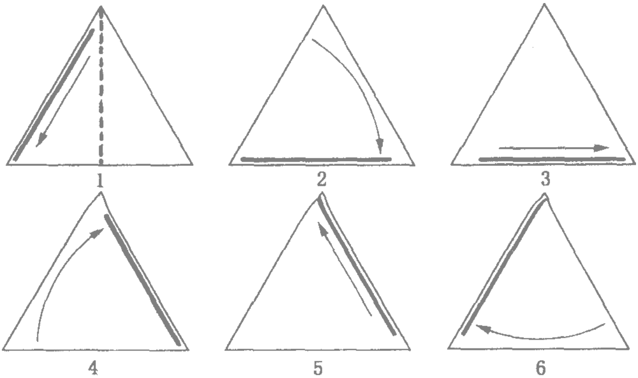


图 102 一根针在三角形里旋转的方法

前文中说过，很久以来三角形曲线一向被视为在单连的图形中能解决这个问题而其面积又是最小的. 直到 1963 年有两位数学家各自独立地发现到面积更小的图形也可以让单位长度的线段在里面作 360 度的旋转. 他们是白鲁门先生和荀柏先生②.（参阅柯[221]克斯特教授所写的《十二篇几何论文》③）

① I.M.Yaglom & V.G.Boltyanskii : *Convex Figures*, 221—222 页,此书似有中译本.两位作者都是前苏联的第一流数学家，其通俗作品在中国相当流行.—— 译注

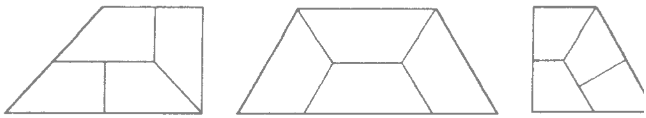
② Melvin Bloom & I.J.Schoenberg.

③ H.S.M.Coxeter : *Twelve Geometric Essays*.

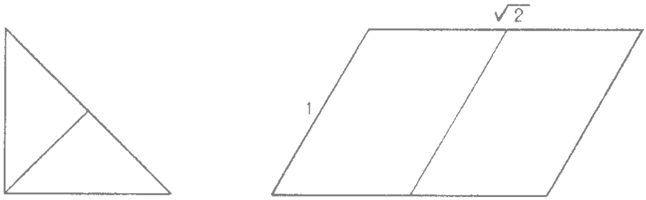
第 19 章
谈平面复生图形

只有三种正多边形，即等边三角形、正方形和正六边形可以用来做铺砌地板的地砖，而所铺砌出的图形全部是这种正多边形的无限重复延伸. 但是有无限多种不规则多边形也可以如此地铺砌地面. 诸如任何形状的不规则三角形，以及任何形状的四边形. 读者可以试做下面的试验. 画一个不拘形状的四边形（甚至不必是凸四边形，也就是说并不必每一个内角都要小过 180 度),用纸板照描之后,剪出二十几个同样的四边形,再将这二十几个四边形一个个地拼凑起来盖满桌面. 这将是一个很有趣的工作.

另外还有一种方法铺砌地面. 这个方法不太寻常，也不太为人所知. 在图 103 的上半部有 3个梯形，它们每一个都可以分割成与原形相似的小梯形. 所以反过来做，4 个全等的梯形可以拼成一个大梯形，并且与原来的小梯形相似. 每 4 个梯形又可以再拼成更大的同形梯形. 这个过程可以无尽止的延伸下去. 英国的大数学家德[222]



三个四生梯形



仅有的两个二生多边形

图 103

摩根先生①将这个情况用下面的儿歌来描述，这个儿歌的前四句又是仿斯威夫特先生②的一首儿歌而写：

大跳蚤,大跳蚤,
背着吸血的小跳蚤.
小跳蚤,小跳蚤,
一直小到看不到.
跳蚤大,跳蚤大,
更大的跳蚤背上爬.
大呀大,大呀大,
大到天涯还在大.

这种可变大也可变小但形状不变的多边形一直没有人注意.直到 1962 年哥龙③先生才开始注意这种可大可小的“复一生

① Augustus De Morgan.
② Jonathan Swift,即《格列佛游记》的作者.
③ Solomon W.Golomb.

图形”①.这位哥龙先生，本来在加州理工学院的喷射推进研究实验室工作，后来转任南加州大学电机系教授.那时他对重复再生的图形有了兴趣,共发表了三篇论文,为多边形‘同形再生’的一般理论奠下了基础.复生图形这个字也是他提供的.他的文章中有许多极富娱乐价值的数学问题，而我的这篇短文也大都取材于此.

【223】

引用哥龙先生的术语，所谓 K 次复生多边形，就是说原来的多边形可以分成 K 个彼此全等而又与原形相似的小多边形，简称为 K-一生图形.例如图 103 上有三个梯形，每个都可以分割成 4 个,所以是一个 4一生梯形.K 不论是何值,K一生多边形都是存在的.当 K 是奇数时,K一生多边形很稀少；如果 K 是平方数则有许多 K—生图形.

已知的 2一生多边形只有两个，即图 103 中的下半图中之等腰三角形及边长为 1 比$\sqrt{2}$的平行四边形.哥龙先生曾经证明过图 103 中的 2一生图形是仅有的 2一生图形，其他凸出的而又 2一生的多边形是不存在的.至于凹进的多边形，能 2一生的可能性似乎不大,但是却没有人能证明其不存在.

2一生的平行四边形之内角可以变化不定而仍然保持其 2—生的特性.当它变成长方形时,这种 2一生的平行四边形在艺术史上和‘黄金分割比长方形’同样的出名.参见本书作者所写的《潇洒数学小品集锦第二集》②.中世纪时期和文艺复兴时期的艺术家，如丢勒先生③常常有意地用这种图形做他作品的框架.街头小贩

①这是一个杜撰的名词.原文是 replicating figures,又缩写为 rep-tile.原文中又常用 rep 并且在后面加上一个数字以表示该图可以分割成多少相似的小块,例如 rep—4 等等.译文则用 4—生.——译注

② *Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*.

③ Albrecht Dürer,德国大画家,也是透视法伟大创始人之一.

有时卖一种游戏用的纸牌，其长与高之比例一定.利用这个性质把方块 A 缩小一半达 3 次之多(见图 104).只要暗中偷偷地把牌折成一半翻过来给你看，你会以为方块 A 变成只有一半大小了.如果这 3 张小牌都和原牌相似，容易证明只有边为 1 比 $\sqrt{2}$ 的矩形才能做这种牌.2一生长方形还有另一个用途.印刷厂印书时,不论是对开本、四开本甚至八开本，每页的大小比例也是 $1:\sqrt{2}$,那么各种大小尺寸的书看上去都是相似的缩型本.

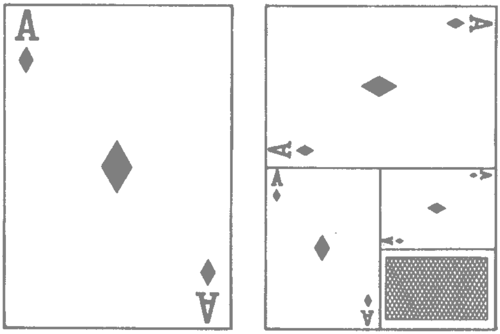
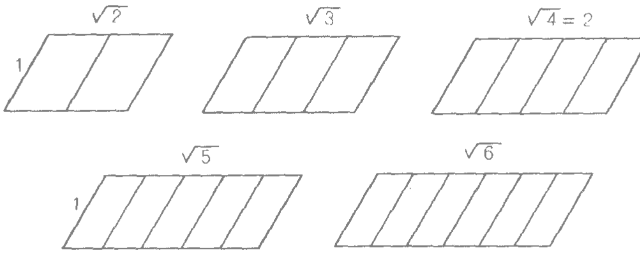


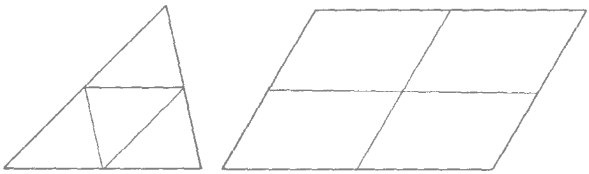
图 104　根据二生长方形将方块 A 缩小三次

图 105 的最上排是一系列的平行四边形，包括 2一生在内.图中看得很清楚,一个平行四边形的边长之比为 $1:\sqrt{k}$ 时则可以分割成相似的 k 小块.这就证明了 k 不论是什么值,k一生的多边形一定是存在的.哥龙先生又说这些图形是唯一的一种图形，可以复生任何次数.他又说,当 $k=7$ 时(或者任何比 3 大而且为 $4n$ 1 型的素数),平行四边形是唯一可以复生多次的图形.当 $k=3$ 或 $k=5$ 时,3一生的三角形或 5一生的正五边形是存在的.读者有兴趣做做看吗？

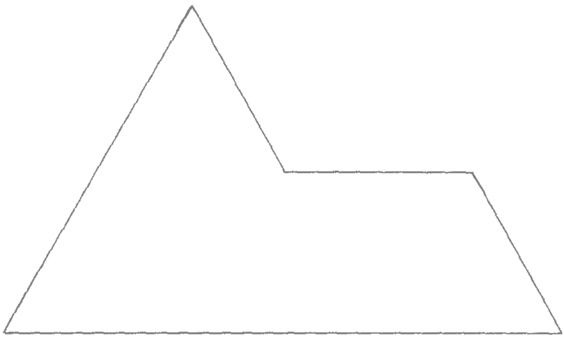
4一生图形很多.任何一个三角形都可以分割成相似的 4 小块(见图 105).平行四边形是四边形中的 4一生图形.图 103 里的 3 个梯形四边形也是 4一生.这就是所有已被发现的 4一生四边



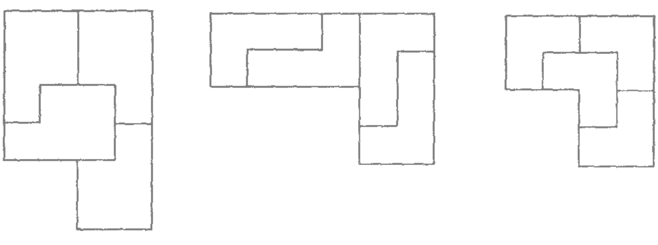
$1\times\sqrt{k}$平行四边形是 k 生多边形



任何一个三角形和平行四边形都是四生多边形



狮身人面像是唯一的四生五边形



四生六边形中已知的三个

图 105

形了.

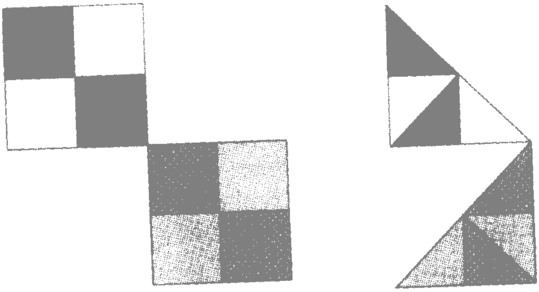
4一生的五边形已经被发现的只有一个，就是图 105 中的狮身人面像.第一个发现它有 4一生特性的又是哥龙先生.图中我们只勾出狮身人面像的大轮廓，好让读者享受一下将它分割为四块复生图形的乐趣.（这个图形称之为狮身人面图是奥比尔尼①先生定名的）

4一生的六边形已知的只有 3 种，任何一个长方形先分成 4 块再去掉 $\frac{1}{4}$,剩下来的就是一个 4一生六边形.图 105 最下排最左边的图形便是众所熟知的例子，其中每一小块都可以分割成两个正方形.同图中还有另外的两个例子，而且每一个都还有其他的分割法.

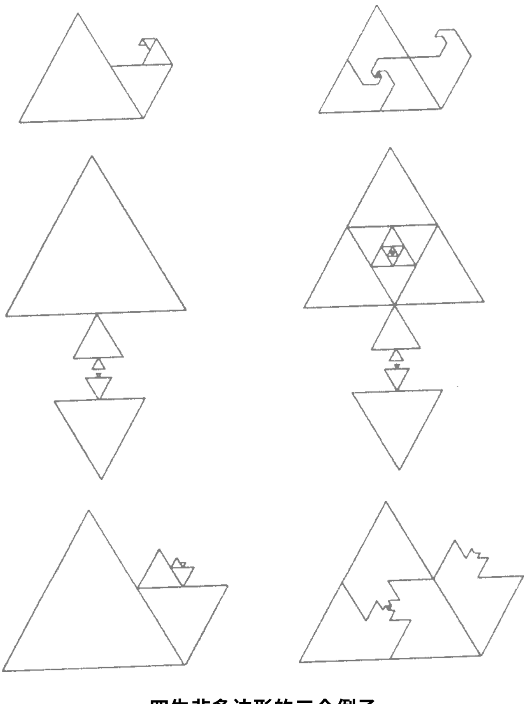
其他的正多边形再也没有 4一生的例子.不过有一种图形,称之为‘星状’图形,其中是有 4一生的.（这里所谓的星状图形是指一组两个或多个多边形,每两个之间只在一个点上相连接)图 106 是哥龙先生所提供的两个例子.在第一个例子中，两个全等的长方形可以用一个正方形代替.除此之外，哥龙先生还列出 3 个非正多边形的 4一生图形，可是没有一个可以在有限的步骤内做出来,图 106 左下方的图形便是.它们都是用等边三角形一个个的画上去连在一起，而且要无止境地做下去.每个新画的三角形都是前一个三角形的 $\frac{1}{4}$.这些星状三角形每 4 个又可以拼成一个大的等边三角形，如图右所示.由于不可能用无限多步骤来画出原来的图形，那会缩得太小，所以每一组三角形中都留有一点点小空隙.

还有一件奇怪的事，那就是每一个已知的 4一生多边形也是一个 9一生多边形.图 107 中的梯形可以用很多不同的方法分割成

① T.H.O’Beirne



两个四生星状多边形



四生非多边形的三个例子

图 106

9块相似的梯形图中只画了一种分割的方法.(读者不妨试试看将其他的 4一生多边形分割成 9一生多边形)这件事实的逆定理也成立,那就是说所有已知的 9一生多边形也都是 4一生多边形.哥龙先生又发现 3个 9一生星状图形,可是其中没有一个是 4一生四边形.如图 108所示

一个 4×4 的棋盘(参看第 16章),如果沿方格边分割成 4个

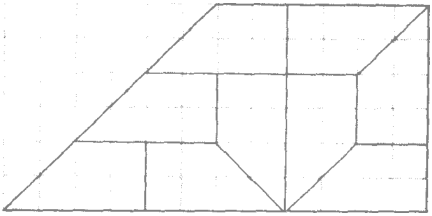


图 107 每个四生多边形都是九生多边形

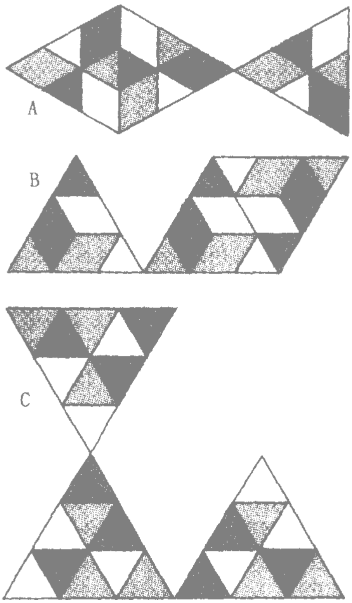


图 108 三个九生星状多边形:(A)鱼 (B)鸟,(C)三个三角形

全等图形，这就带来了一个 16一生图形 .如图 109 中的任何一个 4×4 的正方形所示 .同理，6×6 的棋盘也可以先分割成 4 块之后，再做成一个 36一生的多边形 .等边三角形的棋盘也可以沿三角小格的边分割成一个 36一生的多边形（见图 110）.以上这些例子给哥龙先生带来了以下的一个简单的定理 .哥龙先生对此说明如下：

若 P一图可以分割成两个或两个以上的全等图形，并不一定和 P 相似，分割出的小图形称之为 Q一图，则 Q一图的总数就是 P—图分割为 Q一图的重复数 .例如在图 110 中，3 个全等的六【228】

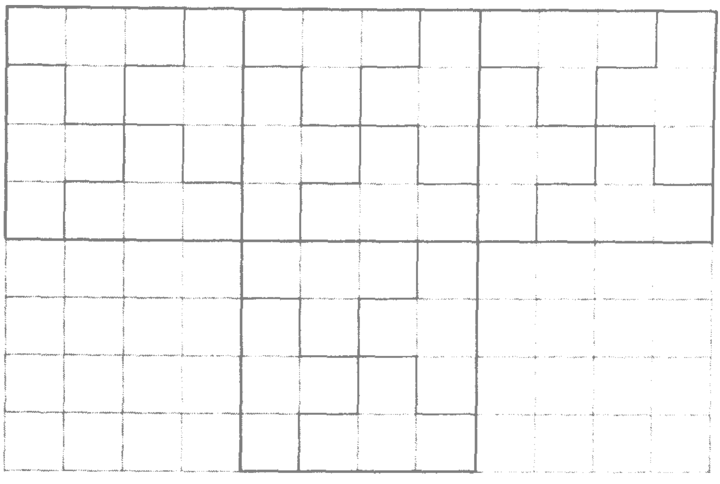


图 109 16 生八边形

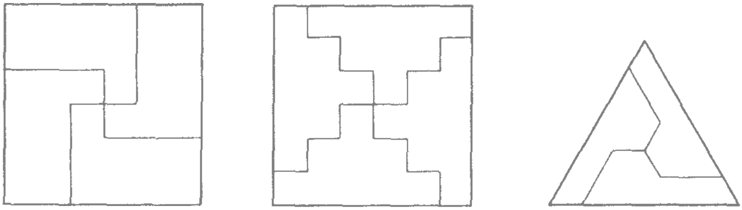


图 110 36 生多边形

边形分割了一个三角形，所以三角形分割成六边形的重复数就是 3.六边形又可以分割成 12 个小三角形，$12\times 6=36$,所以 36 个小六边形便可以拼成一个相似的大六边形.同时 36 个小的等边三角形也可以拼成一个大的等边三角形.说得更数学化一点：设 P 和 Q 是两个不同的图形，P 可以按重复数 s 分割 Q，而 Q 又可以按重复数 t 分割 P，则 P 和 Q 都可以复生为（$s\times t$）小块.当然它们也可以复生成较少的块数.例如等边三角形除了是 36一生三角形之外，也是 4一生，9一生，16一生及 25一生三角形.

若 P—图和 Q—图原本就相似，则从上面的定理可以推衍说一个图形若是 K一生多边形，那它一定也是 K^2一生，K^3一生,及 K^4一生以至 K 的任何高次方的复生多边形.再者，若一图形既是 s一生,又是 t一生,那它一定是 $s\times t$一生的多边形.

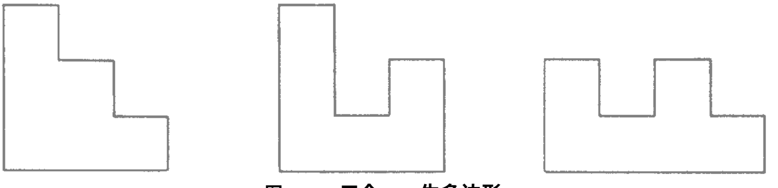


图 111　三个 144生多边形

以上所介绍的各个定理还可以再加推广：若 Q 可以分割成 s 块 P,R 可以分割成 t 块 Q,而 P 又可以分割成 u 块 R,则 P,Q,R,【230】三种图形全是 $s\times t\times u$一生多边形.例如在图 111 中的 3 个不同的六格骨牌，每个都可以分成两个 3×4 的长方形,而 12 个 3×4 的长方形又可以拼成一个正方形；同时这 3 个六格骨牌每一个可以分割成 6 个小正方形.所以这 3 个六格骨牌每一个都可以复生 $2\times 12\times 6=144$ 次.所以有人猜测说这 3 个六格骨牌没有一个的复生数低过 144.

哥龙先生又说,任何一个 4一生多边形，包括星状多边形都可

以用重复数 2来分割一个平行四边形．也就是说，一个平行四边形可以分割成两个已知的 4—生多边形，包括星状多边形在内．有人说，任何 4生多边形都可以做到这一步．但是这只是一个猜测，至今还没有人能证明.

哥龙先生在复生多边形上所做的各项开创性的工作,(此处仅仅介绍了其中最基本的一部分）自然地可以推广到三维空间或更高维空间．最显然的例子，也几乎是不足挂齿的例子是小立方它可以复生 8次，27次或任何的立方次数．再举一个类似的浅例，就是将有相等厚度的图形，平行地削成薄片后是可以做成比原形较大的模型.我相信其他有复生性的立体一定存在.在这个问题上下点功夫或许会产生相等重要的成果.

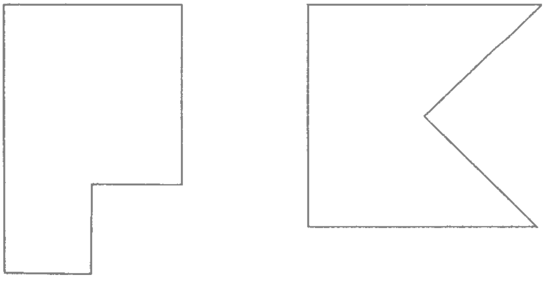


图 112两个图形分割问题

在结束这篇短文之前,我们再介绍两个问题(见图 112).第一个比较简单，请问左边的六边形可以分割出两个全等的星状图形吗？第二个较难，将右边的多边形分割成 4个星状多边形．从这两个题目中所得到的答案均与原来的图形不相似.

增注

在介绍图 111中的 3个六格骨牌时，曾讨论过一个猜测，以为这 3个图形的复生性不低于 144．其实这个猜测只能用在图中头尾的两个骨牌，可不能用在中间的那个骨牌上．有一位 14岁的

孟岱尔①写来的信中告诉一个只有 36 个相似多边形的答案，读者有兴趣找这个答案吗？

有一位新瑞奇先生②说,图 105 最下排的中间那个六边形，每个长方形之内的两个小块目前是镜像反射，如果分割的方法稍加更改，即将原图通过无尽止的仿射变换③分割法则可以得到无穷多个 4一生六边形．只有当外角等于 90 度时才得到 9一生多边形．所以前文中说 4一生的正多边形都是 9—生多边形得到了反证．反之亦然。

本章的参考资料最后三种介绍了一些较为新近的研究结果．

答案

图 113 的最上面是狮身人面像分割为 4 的答案．下面两个介绍如何将三角形分割为 3 或分割为 5 的方法．最下面的两个是有关星形多边形的答案．第一个有无穷个变化，图中所示者乃最简单的一种．

第二个答案有悠久的历史．它是罗亦先生④发表于 1905 年 4 月份的《妇女家庭伴侣》⑤杂志．那个图形与图 105 左下图相似,是去掉 $\frac{1}{4}$ 的正方形，也好似主教的皇帽．他说他花了一年的功夫想把它分割成 4 个全等形，而且每一个都是单连的图形，可是一直无法做得比这个答案更好．此处所刊登的答案很可能在比罗亦时期

更早的数学游戏书刊上找到．

① Mark A. Mandel.

② Ralph Hinrich.

③ affine transformations—— 即夹角不一定要等于 90 度，而可以采用其他的锐角或钝角．

④ Sam Loyd

⑤ *Woman's Home Companion*.

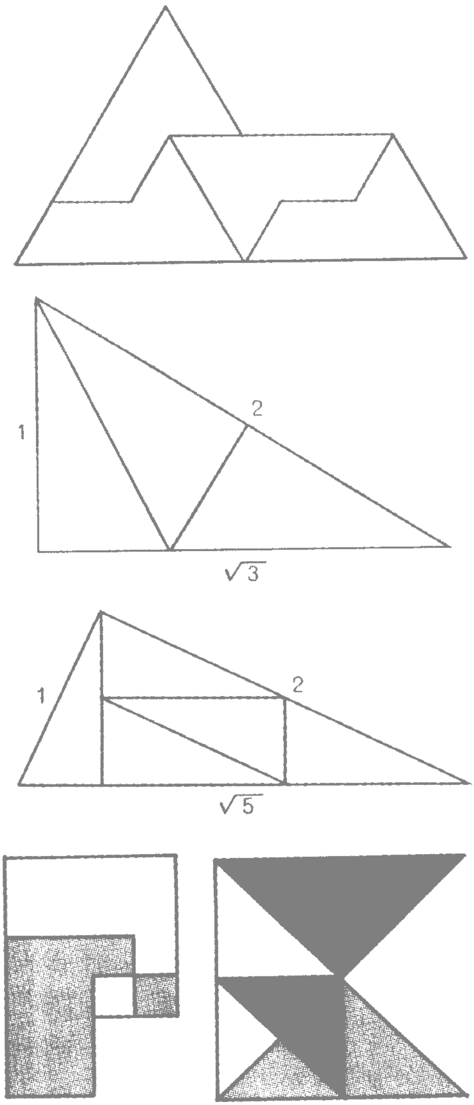


图 113 **几个图形分割的解**

第 20 章
37 个小问题

以下一共收集了 37个小问题，登在这里的用意是希望引起某些读者的兴趣和注意.每一个问题都有点笑谑的口吻,只有几个勉强说得上有点数学含意.希望读者在翻阅答案之前,至少花点时间做点半猜半解的工作.

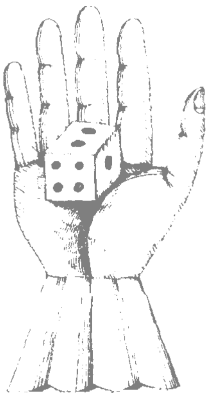


图 114　甲乙两人同掷一个骰子

1. 3个土著妇女肩并肩坐在地上.第一个妇女坐在山羊皮上，她有一个儿子重 140 磅.第二个妇女坐在鹿皮上，她有一个儿子重 160 磅.第三个妇女重 300 磅,坐在河马皮上.这象征着什么著名的几何定理？

2. 有一位精疲力竭的物理学家,一天晚上 10 点钟就上床就寝.他将闹钟开到第二天的中午 12 点.当闹钟响了吵醒他时，他一共睡了几个钟头？

3. 甲丢骰子之后乙又拿起同一个骰子

再丢一次.请问乙比甲的点数大的概率为多少？

4. 什么字和‘不在’意义恰好相反？

5. 在一片平地上，一支高度为 10 英尺的木杆和另一支高度为 15 英尺的木杆之间有相当的距离.如果从每支木杆的顶点拉一根绳子到另一支木杆的底部,其交点之高度为 6 英尺,请算两杆之间的距离.

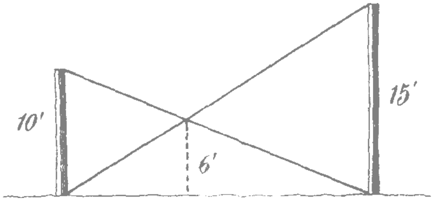


图 115 两根柱子之间的距离是多少？

6. “1 号多少钱？”

“两毛,”店员回答道.

“12 号多少钱？”

“四毛.”

“我要九百十二号.”

“六毛.”

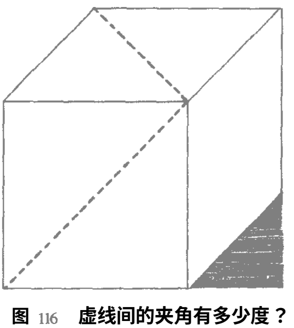
这个人在买什么？

7. 一个三角形的边长为 13,18 和 31.请问它的面积是多少？

8. 美国普林斯顿的高等研究所里的数学家们，有一个常用的字老读错.请问是什么字？

9. 肯尼迪出生于 1917 年,1960 年身任总统.1963 年他 46 岁时正好在位 3 年,以上 4 个数相加之和为 3 926.戴高乐出生于 1890 年,1958 年任法国总统.在他 73 岁高寿时共在位 5 年.这 4 个数相加之和也是 3 926.这是一个巧合呢或是有别的原因？

10. 图 116 中两条虚线之间的夹角有多大？


图 116 虚线间的夹角有多少度？

11．将 NEW DOOR 两个字的字母重新安排而拼成一个字．

12．有一个圆形的蓄水池．一条鱼从池边的某一点出发向北游了 600 英尺到了池边．这一次向东游了 800 英尺又到了池边．请问这水池的直径是多少英尺？

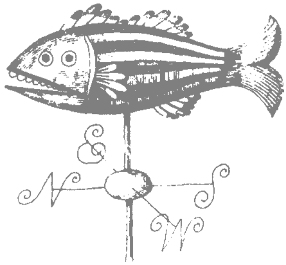


图 117　蓄水池的直径怎样量？

13．有一位统计学家在一个 6 000 人口的小村庄里给所有的居民做一次数学测验，同时也量他们的脚的长短．他发现脚的长短和其数学能力之间似乎有密切的相互关系．为什么？

14．比佛先生的全名是 ROY G. BIV．请问他的名字和哪一个【236】自然现象有关？

15．请用一个 x 写出一个公式，不论用什么正整数代入这公式之 x，所得的结果一定是素数．

16．有一个人想在一大片三角形的平地上盖一座房子，然后再铺三条直路，每一条都从房子开始走向三角形的一边，并且与该边垂直．这块三角形地是一个等边三角形，请问这房子要盖在什么位置才能使三条路的总长度为最小？

17．将 50 用 $\frac{1}{2}$ 除了之后再加 3，答案是多少？



图 118　在这三角形的地上房子要盖在哪里？



图 119　会计师和 balloon 这个英文字

18．将 BSAINXLEATNTEARS 涂掉 6 个字母，剩下来的字母顺序不变而且拼成一个常见的英文字．请问是什么字？

19．一位拓扑学家买了 7 个圈圈饼，除了 3 个以外都吃了，还留下几个？

20．一位会计师在查一家玩具店的帐目，看见汽球这个字的英文（BALLOON）中有两组重复的字母连在一起．“不知道英文里还有没有任何字中间有三组双重字母？”他自言自语道．请仔细查查．

21．图 120 中的两条直线是一个三角形两个底角的角平分线．这两条角平分线互相垂直．若此三角形的底边长度是 10 寸，它的高度是多少寸？

22．哪几个月有 30 天？

23．石太太想戒烟．最后一包烟只剩下 9 支，可是每抽 3 支烟之后，又可以将烟屁股拼成一支烟．那么她还要再抽几支烟之后才能戒呢？

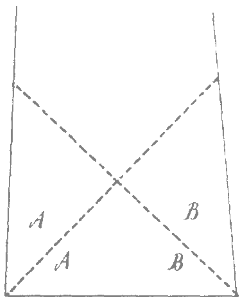


图 120 三角形的高度是多少？



图 121 她在抽最后一支烟



图 122 进入下一轮比赛的网球员

24．下面这个数字读起来像拗口令．请问该怎样读？

1 264 853 971.275 846 3

25．“这里有三粒丸药”，医生说，“每半个钟头口服一粒．”多久之后可以服完？

26．137 位选手参加一场网球淘汰赛．第一轮有一位选手轮

空,因为 137 是奇数.以后各轮也一一配对，多出来的选手便轮空.原本的计划是要打最少的场数便选出冠军.请问最少要打多少场？

27. 请找出一个英文字，只要用打字机最上面一排的字键便可以拼出来.

28. 一个盒子里有两个美国硬币，相加的总值是五毛五.但是有一个并不是五分的硬币，请问是两个什么硬币呢？

29. 一条鱼,重量等于 20 磅再加上体重的一半.这条鱼有多重？

30. 下面是一个电报的全文：

“MARGE, LET DAM DOGS IN. AM ON SATIRE; VOW I AM CAIN, AM ON SPOT, AM A 【239】JAP SNIPER. RED, RAW MURDER ON GI! IGNORE DRUM … WARDER REPINS PAJAMA TOPS … NO MANIAC, MA! IWO VERITAS: NO MAN IS GOD. — MAD TELEGRAM.”

这封电报有什么特色?

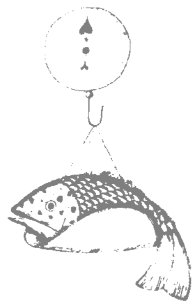
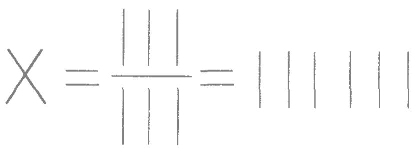


图 123 称鱼的重量

31. 下面是一个对称的算式:



X等于多少？（每一组 III 都是用不同的记数法）

32. 下面一排 6 个玻璃杯，3 个盛满了水，3 个是空杯.请移动一个杯使空杯和满杯变成交替排

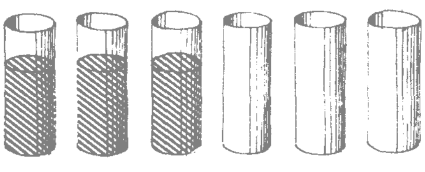


图 124 只动一个杯子则空杯和有水的杯就相互间隔

列.该动哪一个杯子？

33. 一个轮子有 10 根支柱,例如自行车轮子的钢丝.请问支柱之间的空间有几块？

34.“这句话中的字数是九”这句话显然是真的.真命题的反面通常是不真的.找出一句话，和上面这句话相反但又是真的.

35. 两个女婴,同年同月同日生,双亲也相同,但是却不是双胞胎.为什么？ 【240】

36.“我跟你赌一块钱,如果你给我五块钱,我就会给你一百块.”你看值不值得跟他赌？

37. 欧。亨利①的著名短篇小说《麦琪的礼物》开头的第一句是‘一块八毛七分,所有的钱都在这里.有六十个是一分的.’这句话有没有毛病？



图 125 如何输掉四块钱

答案

1. 题目中所问的定理是毕达哥拉斯定理.

2. 2小时.

3. 概率是 $\frac{5}{12}$.两个人掷的点子相同的概率是$\frac{1}{6}$.所以两人中一人掷出的点子比另一人高的概率是 $\frac{5}{6}$,即 $\frac{10}{12}$.甲和乙掷出大点子的机会相等，所以可以把$\frac{10}{12}$用 2除,故概率为 $\frac{5}{12}$

4.“在”.

5. 相交点的高度等于两根杆子高度的乘积除以高度之和，与两根杆子之间的距离根本无关.所以两根杆子之间的距离可以是

① O.Henry——19 世纪美国的名作家.

任何值.

6. 门牌号码.

7. 面积为零.

8. "错"字.

9. 任何一个日期,加上到目前(即题中的1963)所经过的年数,一定等于目前的纪年.所以将两组如此的日期相加,一定等于目前纪年(1963)的两倍.

10. 两线之间的角度是60度.因为将这两条线和另一条相连正好成为一个等边三角形.

11. 可以拼成"ONE WORD".①

有一位读者华尔西先生②来信说,在他读这37个问题时,正好同期的《科学美国人》月刊上有一篇文章讨论解决问题时的心态,所以每碰到一个问题,他总是先检讨他当时的心态.当他知道这个问题的解答是"ONEWORD"时,他认为既然问题并没有指明字母可以或不可以掉转方向,所以他就把W转了180度而他的答案是DOORMEN.

12. 这条鱼游了一个直角三角形,它的顶点全在圆上.直径不但是三角形的一边,也正是这直角三角形的弦.其他的两个边各为600英尺及800英尺,所以圆的直径是1 000英尺.

13. 因为所谓的"每一位居民"是包括婴儿和幼童在内.

14. 比佛先生全名的每一个字母正好代表虹的七个颜色:R(红),O(橙),Y(黄),G(绿),B(蓝),I(青),V(紫)

15. 可以用的公式很多,例如$2+1^x$, $0x+3$, $2+\frac{x}{x}$等等

16. 这三条路的总长等于三角形的高.所以房子的位置在哪

①题中已经暗示是"一个字".

② William T. Walsh.

里都是一样.

17. 103.

18. 划掉6个字母之后,剩下来的是BANANA.有一位读者马可儿先生①划掉的是SAINXL 6个字母,剩下来的是BETTER.这当然是比较好(better)的答案.

19. 3个.

【242】

20. 答案是bookkeeper(会计师)另外两位读者福格生先生和莫塞尔先生②又提出subbookkeeper(助理会计师)一字,此字曾出现在1942年出版的Webster大字典内.这个字里有四组双重字母连接在一起.阿尔维德生先生③来信说:"如果哪一位会计师知道字典里还有一个字是boobbookkeeper的话,一定觉得做会计师真窝囊."(boob是笨伯的意思)当我把这封信转给巴尔先生④时,他马上顺口就说出subboobbookkeeper(笨伯助理会计师).一个字里竟有六组相连的双重字母.

21. 三角形的高度是无穷大.A,B两角相加为90度,所以$2A+2B$等于180度.也就是说这个三角形的顶角是0度.同时其他两边互相平行,可以一直延伸到无穷.

22. 除了二月之外,都有三十天.

23. 答案是13支香烟.有三位先生同时说石太太浪费了烟屁股.他们说她应该先抽10支烟,将烟屁股凑起来之后再抽,一共抽了14支.这时只剩下两个烟屁股.她应该到别处再找一个烟屁股凑成一支再抽.抽了之后剩下来的烟屁股放回她找到的地方.这样她就抽了15支.

① Robert E. Machol.

② Jerome Ferguson & Leo Moser.

③ Peter F. Arvedson.

④ Stephen Barr.

24．读作十二亿六千四百八十五万三千九百七十一点二七五八四六三.

25．一小时之后.

26．既然要淘汰 136 位选手,就得打 136 场.

27．这个字是 TYPEWRITER.其他还有几个十个字母的答案，也有比十个字母更长的答案①.

28．一个五毛的和一个五分的.因为那个五毛的就不是五分的硬币.

29．40 磅.

30．这封电报的电文从头读到尾或从尾读到头都一样.它是[243]一份回文电报.

31．$X=\frac{111}{3}=37$.

在原题中,分子的三个 I 是看作阿拉伯记数的 111,分母的三个 I 看作是罗马制里的 3.答案中，前面一段三个 I 是罗马制里的 3,而后一段的三个 I 是二进制的 37.

有两位读者给这个算式不同的解释.首先他们认为 |||是指 1 的绝对值 |1|,所以原式的意义是 1 的绝对值除以 1 的绝对值,等于 1 的绝对值乘以 1 的绝对值.

32．拿起第 2 个玻璃杯,将水倒入第 5 个玻璃杯,再将第 2 个玻璃杯放回原处.

33．当然也是 10 块.

34．这一句话应该是“这句话中的字数不是九.”

35．她们是三胞胎中的两个.

36．不值得.因为他可以拿了你五块钱之后马上认输而只给

① 打字机及计算机的键盘第一排共有九个字键，它们是 QWERTYUIOP.—— 译注

回你一块钱.

37. 没有毛病.当欧·亨利写这篇有名的短篇小说时，美国还流行三分的硬币（其实到 1889 年还可以看到）；而两分的硬币是 1873 年停止发行的，但此后仍流通了很长一段时间.所以只要用一个两分的或者四个三分的硬币，就能解释欧亨利的陈述. 【244】

1991 年版编后记

讨论‘意料之外的绞刑’悖论的文章仍然继续不断的发表，所以那一章的参考资料我尽我所知将 1969 年本书出版之后所发表的资料尽量收集，希望至少能将用英文写的专文一一收集.哲学家们至今仍然在这个悖论上绞尽脑汁，似乎仍然没有找到大家都能接受的结论.这真是令人叹为观止的事.

这个悖论仍然以不同的形态出现.例如荷夫斯塔特先生①就建议不要将鸡蛋放在盒子里，最好是放毒蛇.梭润生先生②在 1982 年发表的文章中提出三种不同的表述方式，全与时间的先后顺序无关.有一种方式讨论所谓的‘摩尔式判词’,另一种是讨论在 3×3 棋盘上的棋子游戏，第三种讲的是一些用处女做奠祭的故事. 1987 年我曾采用他讨论棋局的文章作为参考资料.他的名著

① Douglas Hofstadter.

② Roy Sorensen.

《盲点》①在 1988 年出版，讲到这个悖论的历史并重刊了 1982 年的文章.

纽结原理已经渐渐成为拓扑学中的一项大热门.1984 年琼斯先生②发现了一个新的多项式公式，可以将不同的纽结予以分类，而且又指出如此的分类在量子力学上的应用和影响.这真使数学家和物理学家们都叹为观止.一些文献也将此收入了参考资料书目之中.

佛里德里克生先生③是一位研究计算机的专家.他将林德瑞有关几何图形分割的专书加了一些增订.例如本书中的第 16 图，和将六角形分割为六边形的新方法（第 126 图),新的分割法只要分成 6 块.不过其中有 2块要翻身.

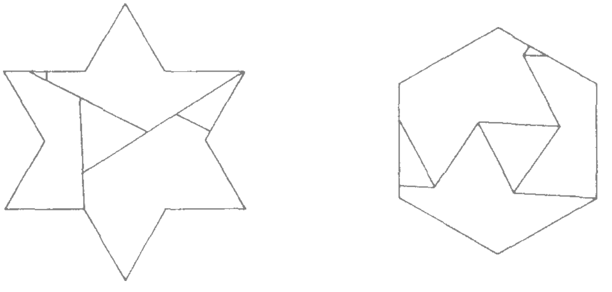


图 126　佛里德里克生将六角星分割为六块拼成正六边形的改进方法

图 127 是表示如何将六角形分割成 9块而成为十二边形.

第 5 章的参考资料我包括了史卡尼后来写的三本有关赌博的书.他在 1985 年去世，去世前自资出版了一本引起相当争议的小书,书名叫《黑手党的阴谋》④.在书中他费尽功夫想证明所谓黑手

① *Blindspots*.

② Vaughan Jones.

③ Greg Frederickson.

④ *The Mafia Conspiracy*.

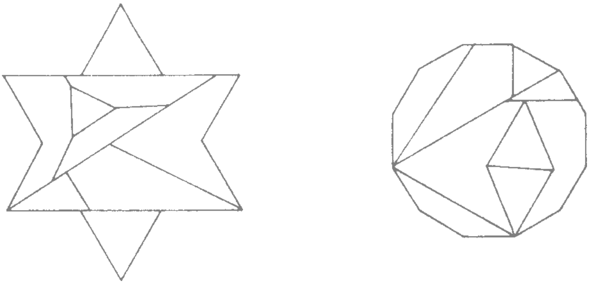


图 127 佛里德里克生将六角星分割为九块拼成正十二边形的改进方法

党这个犯罪组织只不过是新闻工作人员的构想和虚造，用以毁谤意大利人而已.

在我写“四维空间里的教堂”时还没有任何有名的物理学家相信在我们的宇宙之外真的有比三维空间更高维度的世界存在.（相对论中引进四维空间的观念只不过因为这样才可以用某些方程式来处理时间而已）如今基本粒子物理学家津津有味地讲什么“超弦”①,其中基本质点不再是几何学中的‘点’而已,而是一个个张力很强的小环，同时在高维空间中振动不已. 这些高维度的空【246】间又紧密地挤压在一起,变成很小很小的结构,甚至原子加速器也无法将它们探测出来.

有些物理学家认为所谓高维度空间只不过是应数学之需要而产生的架构而已.但是也有些物理学家认为它们和三维空间一样是实有其物的.②物理学家认为高维空间实际存在还是最近的事.这或许就是一些有关四维空间或更高维度空间的书籍最近陆续出版的原因.我推荐的书③中的计算机图片十分

① Superstring.

② 关于超弦，请参阅原作者的另一本书——*New Ambidextrous Universe*.

③ *Beyond the Third Dimension* by Thomas F. Banchoff

漂亮.

第7章里的第一个问题经由卡鸿先生①推广在1972年的《数学杂志》刊登.另外有一位阿博先生②写了一本妙书，书名叫《迷径》③.我曾根据他的迷径之一提出一个问题.这本书中介绍了二十几种从来没有人读到过的迷径新书出版时由我作序，颇以为荣.

我所设计的"六兵棋"街坊上可以买到两种不同的型式.1969年IBM公司设计了一种玩这个游戏的棋盘，用一个小转轮来选颜色再加上几个按钮处理赏罚.IBM用的名字就是"六兵棋",除了卖给一般客户之外,又专门供给学校作为数学课的教材之一.1970年有一家加伯瑞勒公司也推行过类似的玩具.这家公司还在1970年10月26号的《科学新闻周刊》④上刊登广告.后来有一位波尔特先生⑤写过一本专门给学校各种教学节目用的参考手册.第一章就介绍这种玩具.用的标题是"让我们自己设计电子计算机".

电子计算机，尤其是那些会学习自己的经验而增进能力的电子计算机，是发展人类心智的最佳也是最流行的工具.所用的线路称之为神经网络线路，以并行的方式处理数据.有关神经网络线路的参考文献,实在是处处可见,不胜枚举,所以我没有将它们列入参考书目之中.人脑是一部极为复杂的电子计算机，又会处理数据,又会吸取经验.它到底是如何发展它的功能，至今并未完全了解.

① D.K.Cahoon.

② Robert Abbott.

③ *Mad Mazes*.

④ *Science News*.

⑤ A.B.Bolt.

第 8 章写到电子计算机下国际象棋.现今的操作程序已发展到国家级选手甚至世界级选手的程度.好的程序并不只靠下棋的[247]经验而是依赖它们分析复杂棋路的速度.我相信不久之后,电子计算机可以赢世界冠军.

早在 1972 年托尔普先生①和华尔登先生②便已经证明在 3×3 的围棋盘是先下棋的棋手一定赢.至于 5×5 的围棋,是先下的赢,或后下的赢，或者会不会是和棋，据我所知，至今仍无定论.我相信，一旦有人将这些棋局当作娱乐数学问题来处理，不久便会有电子计算机的程序来讨论它们.

有一位年青的赫肯贝女士③发明了一种在 4×8 棋盘上下的国际象棋.这个棋盘是标准棋盘的一半.她的发明刊登在 1968 年 11 月份的杂志《眼》④上.

开始时 8 个白棋全照常例摆在第一排，第二排是白棋的 5 个兵.马、象和皇后的三列上没有兵.黑棋的布阵和白棋完全相同.棋盘上有 6 个空格.玩棋时多了两个新规则：白棋第一步不准走兵，兵直走时可以向前，也可以向后；走对角线吃棋时，一定要退后.

赫肯贝说白棋的第一步最好是用王棋一侧的马吃掉车前兵,即 KB 到 N2 将军.不过黑棋也有对策，即以后一侧象前兵吃掉白棋的后前兵，然后一直走下去，包括吃掉白棋的皇后在内.这样看来，赫肯贝所建议的第一步似乎反而给白棋带来灾害，所以不一定是最好的一步.是不是黑棋下了一路凶棋之后，白棋也有对应之策呢？据我所知，如此的袖珍棋似乎还没有详尽的

① Edward Thorp.

② William Walden.

③ Chi Chi Hackenberg.

④ *Eye*.

分析

在讨论螺线的那一章，我说"Eadem mutata resurgo"这一句拉丁文没有刻在贝努利的墓碑上，这是不正确的.德国有一位特莱兹先生①寄给我一张明信片，几面就有这坟墓的照片，在被墓志铭围绕的螺线中间就刻有这句话.

好些朋友告诉我一些地理性的螺线.在古希腊神话中,斯泰克斯河②是一条螺线绕哈底斯③7次.在保木所写所神奇小说《天岛》④的第十三章说品克城只有一条街，它从城门口绕到城中心的皇宫,就是一条螺线.

在我所写的《灵巧的世界》一书中，各位可以看到我讨论分辨左右的通讯法,"宇称守恒定律"如何被推翻.以及现代科学界所讨论的左一右问题及趣闻.那本书中，也有一些有关旋转对称和镜像对称的资料.

近年来书法艺术大为增进.写出来的字句，不论如何旋转或反映，要不是保持不变就是根本看不出原形，真是提高到极高的水平.致力于此的两大功臣是金先生和何夫斯塔特⑤以及其他的人.看上去真像魔术.请参阅1981年6月份的《科学的美国人》月刊，以及金氏和何氏所写的书.在参考资料书目中,我也列出最近在某杂志书法比赛中得奖的好手.

新马斯特⑥为牛津大学出版社⑦编印一系列数学游戏的书.1985年便出版了比斯雷写的一本有关单人跳棋的书，讨论各种不

① Klaus Treitz.

② River Styx.

③ Hades.

④ *Sky Island* by L. Frank Baum.

⑤ Scott Kim & Douglas Hofstadter.

⑥ David Singmaster.

⑦ Oxford University Press.

同的问题,理论及历史.

加拿大有一位计算机科学家,名叫德内①,他在 1979 年发表了一篇专题论文，讨论平面世界里的科学和科技，给研究平面国的圈子带来极大的成就.我在《科学美国人》月刊中作了详尽的报导.德内先生也写了一本很出色的书.

在一份很老的杂志里②我看到一篇文章，题目叫“魔链”，讲的就是‘滚环链”.文章里还有链环的图片.无名氏作者写道“这个奇怪的小玩意有时街上有得卖，自己做也不难.主要是有关一个相当引人注意的光学幻觉.我相信读者会对它有兴趣.’更早的资料一定是存在的.如果能知道谁发明这个玩意该多好.

专为《科学美国人》月刊写‘业余科学家’专栏的瓦克先生③在该杂志 1985 年的 5 月份写了一篇第 17 章里所讨论的绳子戏的文章.我曾看到两个有趣的图形.美国画家维克瑞④画过一张画，画里有一个小孩正在“勾线网”（据说这张画可以买到）.另一位美国【249】画家何枚⑤则画两个女孩在‘勾线网”.

1969 年英国曾发行过一种 50 便士的硬币.共有 7 个边,每一边都是一小段弧线，构成定宽曲线.七边形的硬币想必是第一次见.宽度不变听说是便于使用吃角子机器.

有一种复生图形哥龙先生称之为最不可思议的曲线，那就是无穷复生图形（此种图形的边有无穷多）.它的发明者吉尔斯先生⑥称之为‘超级图形”.其实哥龙先生的无穷复生图形或吉尔斯

① A.K.Dewdney.

② *The English Mechanic and World of Science*, Nov.23, 1888: p 251

③ Jearl Walker.

④ Robert Vickrey.

⑤ Winslow Homer.

⑥ Jack Giles.

的超级图形就是最早期的分形① 哥龙先生说吉尔斯本来在一间停车场工作，把他的文章交给哥龙，后者再替他送到一份数学杂志上发表.

① fractals.

参考文献

第1章 意料之外的绞刑

D. J. O'Connor, "Pragmatic Paradoxes," *Mind*, Vol. 57, July 1948, p 358—59.

L. Jonathan Cohen, "Mr. O'Connor's 'Pragmatic Paradoxes,'" *Mind*, Vol. 59, January 1950, p 85—87.

Peter Alexander, "Pragmatic Paradoxes," *Mind*, Vol. 59, October 1950, p 536—38.

Michael Scriven, "Paradoxical Announcements," *Mind*, Vol. 60, July 1951, p 403—7.

D. J. O'Connor, "Pragmatic Paradoxes and Fugitive Propositions," *Mind*, Vol. 60, October 1951, p 536—38.

Paul Weiss, "The Prediction Paradox," *Mind*, Vol. 61, April 1952, p 265—69.

W. V. Quine, "On a So-called Paradox," *Mind*, Vol. 62, January 1953, p 65—67.

Frank B. Ebersoie, "The Definition of 'Pragmatic Paradox,'" *Mind*, Vol. 62, January 1953, p 80—85.

R. Shaw, "The Paradox of the Unexpected Examination," *Mind*, Vol. 67, July 1958, p 382—84.

Ardon Lyon, "The Prediction Paradox," *Mind*, Vol. 68, October 1959, p 510—17.

T. H. O'Beirne, "Can the Unexpected *Never* Happen?," *The New Scientist*, Vol. 15, May 25, 1961, p 464—65; letters and replies, June 8, 1961, p 597—98.

David Kaplan and Richard Montague, "A Paradox Regained," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 1, July 1960, p 79—90.

G. C. Nerlich, "Unexpected Examinations and Unprovable Statements," *Mind*, Vol. 70, October 1961, p 503—13.

Brian Medlin, "The Unexpected Examination," *American Philosophical Quarterly*, Vol. 1, January 1964, p 1—7.

F. B. Fitch, "A Goedelized Formulation of the Prediction Paradox," *American Philosophical Quarterly*, Vol. 1, 1964, p 161—64.

B. Meltzer, "The Third Possibility," *Mind*, Vol. 73, July 1964, p 430—33.

R. A. Sharpe, "The Unexpected Examination," *Mind*, Vol. 74, April 1965, p 255.

B. Meltzer and I. J. Good, "Two Forms of the Prediction Paradox," *British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 16, May 1965, p 50—51.

J. M. Chapman and R. J. Butler, "On Quine's 'So-called Paradox,'" *Mind*, Vol. 74, July 1965, p 424—25.

James Kiefer and James Ellison, "The Prediction Paradox Again," *Mind*, Vol. 74, July 1965, p 426—27.

Judith Schoenberg, "A Note on the Logical Fallacy in the Paradox of the Unexpected Examination," *Mind*, Vol. 75, January 1966, p 125—27.

J. T. Fraser, "Note Relating to a Paradox of the Temporal Order," *The Voices of Time*, J. T. Fraser, ed. New York: Braziller, 1966, p 524—26,679.

J. A. Wright, "The Surprise Exam: Prediction on Last Day Uncertain," *Mind*, Vol. 76, January 1967, p 115—17.

D. R. Woodall, "The Paradox of the Surprise Examination," *Eureka*, No. 30, October 1967, p 31—32.

James Cargile, "The Surprise Test Paradox," *Journal of Philosophy*, Vol. 64, September 1967, p 550—63.

Robert Binkley, "The Surprise Examination in Modal Logic," *Journal of Philosophy*, Vol. 65, 1968, p 127—36.

Craig Harrison, "The Unexpected Examination in View of Kripne's Semantics for Modal Logic," *Philosophical Logic*, J. W. Davis et al., eds. Holland: Reidel, 1969.

A. K. Austin, "On the Unexpected Examination," *Mind*, Vol. 78, January 1969, p 137.

C. Hudson, A. Solomon, and R. Walker, "A Further Examination of the 'Surprise Examination Paradox,'" *Eureka*, October 1969, p 23—24.

J. McLelland, "Epistemic Logic and the Paradox of the Surprise Examination Paradox," *International Logic Review*, Vol. 3, January 1971, p 69—85.

Ian Stewart, "Paradox Lost," *Manifold*, Autumn 1971, p 19—21.

Jorge Bosch, "The Examination Paradox and Formal Prediction," *Logique et Analyse*, Vol. 59, September-December 1972.

A. J. Ayer, "On a Supposed Antimony," *Mind*, Vol. 82, January 1973, p 125—26.

Peter Y. Windt, "The Liar and the Prediction Paradox," *American Philosophical Quarterly*, Vol. 10, January 1973, p 65—68.

B. H. Slater, "The Examiner Examined," *Analysis*, Vol. 35, December 1974, p 48—50.

M. Edman, "The Prediction Paradox," *Theoria*, Vol. 40, 1974, p 166—75.

J. McLelland and Charles Chihara, "The Surprise Examination Paradox," *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 4, February 1975, p 71—89.

I. Kvart, "The Paradox of the Surprise Examination," *Logique et Analyse*, Vol. 11, 1976, p 66—72.

T. S. Chaplain, "Quine's Judge," *Philosophical Studies*, Vol. 29, May 1976, p 349—52.

Michael Stack, "The Surprise Examination Paradox," *Dialogue*, Vol. 26, June 1977.

Crispin Wright and Aidan Sudbury, "The Paradox of the Unexpected Examination," *Australasian Journal of Philosophy*, May 1977, p 41—58.

A. K. Austin, "The Unexpected Examination," *Analysis*, Vol. 39, January 1979, p 63—64.

Martin Gardner, "The Erasing of Philbert the Fudger," *Science Fiction Puzzle Tales*, Chapter 20. New York: Clarkson Potter, 1981.

Roy A. Sorensen, "Recalcitrant Variations of the Prediction Paradox," *Australasian Journal of Philosophy*, Vol. 60, December 1982,

p 355—62.

Doris Olin, "The Prediction Paradox Resolved," *Philosophical Studies*, Vol. 44, September 1983, p 225—33.

Avashin Margalit and Maya Bar-Hillel, "Expecting the Unexpected," *Philosophia*, Vol. 18, October 1982, p 263—89.

Roy A. Sorensen, "Conditional Blindspots and the Knowledge Squeeze: A Solution to the Prediction Paradox," *Australasian Journal of Philosophy*, Vol. 62, June 1984, p 126—35.

Joseph Wayne Smith, "The Surprise Examination on the Paradox of the Heap," *Philosophical Papers*, Vol. 13, May 1984, p 43—56.

Roy A. Sorensen, "The Bottle Imp and the Prediction Paradox," *Philosophia*, Vol. 15, January 1986, p 421—24.

Roy A. Sorensen, "A Strengthened Prediction Paradox," *Philosophical Quarterly*, Vol. 36, October 1986, p 504—13.

Joseph Y. Halpern and Yoram Moses, "Taken by Surprise: The Paradox of the Surprise Test Revisited," *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 15, 1986, p 281—304.

Raymond Smullyan, "Surprised?" *Forever Undecided*, Chapter 2. New York: Knopf, 1987.

Jack M. Holtzman, "An Undecidable Aspect of the Unexpected Hanging Problem," *Philosophia*, Vol. 72, March 1987, p 195—98.

Martin Gardner, "Again, How's That Again?," *Riddles of the Sphinx*, Chapter 27. New York: Mathematical Association of America, 1987.

Jack M. Holtzman, "A Note on Schrödinger's Cat and the Unexpected Examination Paradox," *British Journal of the Philosophy of Science*, Vol. 39, 1988, p 397—401.

Roy Sorensen, *Blindspots*, Chapters 7, 8, and 9. London: Oxford University Press, 1988.

William Poundstone, "The Unexpected Hanging," *Labyrinths of Reason*, Chapter 6. New York: Doubleday, 1988.

第2章 纽结和波若米欧环

Peter Guthrie Tait, "On Knots," *Scientific Papers* (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1898), Vol. 1, p 273—347.

K. Reidemeister, *Knotentheorie*. New York: Chelsea Publishing, 1948.

R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*. New York: Ginn and Company, 1963.

R. H. Crowell, "Knots and Wheels," *Enrichment Mathematics for High School*. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1963.

M. K. Fort, Jr., ed., *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*. New York: Prentice-Hall, 1963.

L. P. Neuwirth, *Knot Groups*. Princeton. N. J.: Princeton University Press, 1965.

Dale Rolfsen, *Knots and Links*. Houston, Tex.: Publish or Perish, Inc., 1976.

Martin Gardner, "Mathematical Games," *Scientific American*, September 1983, p 18—27.

Louis H. Kauffman, *On Knots*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1987.

L. Lusanna (ed.), *Knots, Topology, and Quantum Field Theory*. Teaneck, N. J.: World Scientific, 1989.

M. L. Ge and C. N. Yang (eds.), *Braid Group, Knot Theory, and Statistical Mechanics*. Teaneck, N. J.: World Scientific, 1990.

Toshitake Kohno (ed.), *Knots*. Teaneck, N. J.: World Scientific, 1991.

Louis H. Kauffman, *Knots and Physics*. Teaneck, N. J.: World Scientific, 1991.

第3章 超越数 e

Constance Reid, "*e*," *From Zero to Infinity*, 3d edition. New York: Thomas Y. Crowell, 1955. See p 154—73.

H. V. Baravelle, "The Number *e*: The Base of Natural Logarithms," *The Mathematics Teacher*, Vol. 38, No. 8. December 1945, p 350—55.

R. G. Stoneham, "A Study of 60,000 Digits of the Transcendental '*e*,'" *American Mathematical Monthly*, Vol. 72, No. 5, May 1965, p 483—500.

Darrell Desbrow, "Another Surprising Appearance of *e*," *Mathematical Gazette*, Vol. 74, June 1980, p 167—70.

Harris S. Shultz and Bill Leonard, "Unexpected Occurrences of the Number *e*," *Mathematics Magazine*, Vol. 62, October 1989, p 269—72.

第4章 几何分割

Henry Ernest Dudeney, *The Canterbury Puzzles*. New York: Dover Publications (paperback), 1958.

Henry Ernest Dudeney, *Amusements in Mathematics*. New York: Dover Publications (paperback), 1958.

Henry Ernest Dudeney, *536 Puzzles and Curious Problems*, edited by Martin Gardner. New York: Scribner, 1967.

Sam Loyd, *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, 2 vols., edited by Martin Gardner. New York: Dover Publications (paperback), 1959—1960.

V. G. Boltyanskii, *Equivalent and Equidecomposable Figures*, translated

and adapted from the first Russian edition (1956) by Alfred K. Henn and Charles E. Watts. Boston: D. C. Heath, Topics in Mathematics Series, 1963.

Harry Lindgren, *Geometric Dissections*. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1964.

Six Papers on dissection, written by members of the Mathematics Staff of the College, University of Chicago, in *The Mathematics Teacher* — Vol. 49, May 1956, p 332—43; October 1956, p 442—54; December 1956, p 585—96; Vol. 50, February 1957, p 125—35; May 1957, p 330—39; Vol. 51, February 1958, p 96—104.

Harry Lindgren, "Some Approximate Dissections," *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 1, No. 2, April 1968, p 79—92.

Harry Lindgren, *Recreational Problems in Geometric Dissections*. New York: Dover, 1972. This is the previous book by Lindgren, corrected and much enlarged by Greg Frederickson.

Greg Frederickson, "More Geometric Dissections," *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 7, Summer 1974, p 206—7.

Greg Frederickson, "Several Prism Dissections," *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 11, No. 3, 1978—79, p 161—75.

第5章 漫谈赌博

John Scarne and Clayton Rawson, *Scarne on Dice*. Harrisburg, Pa.: Military Service Publishing Co., 1945.

John Scarne, *The Amazing World of John Scarne*. New York: Crown Publishers, 1956.

John Scarne, *The Odds Against Me*. New York: Simon and Schuster, 1966.

Oswald Jacoby, *How to Figure the Odds*. Garden City, N. Y.: Doubleday, 1947.

Oswald Jacoby, *Oswald Jacoby on Gambling*. Garden City, N. Y.: Doubleday, 1963.

Roger Baldwin, *Playing Blackjack to Win*. New York: M. Barrows, 1957.

Sidney H. Radner, *Roulette and Other Casino Games*. New York: Wehman Brothers, 1958.

Edward O. Thorp, *Beat the Dealer*. New York: Blaisdell, 1962.

Frank Garcia, *Marked Cards and Loaded Dice*. New York: Prentice-Hall, 1962.

Alan H. Wilson, *The Casino Gambler's Guide*. New York: Harper & Row, 1965.

John Scarne, *Scarne's Complete Guide to Gambling*. New York: Simon and Schuster, 1974. Reissued in paperback, 1986, as *Scarne's New Complete Guide to Gambling*.

John Scarne, *Scarne's Guide to Casino Gambling*. New York: Simon and Schuster, 1978.

John Scarne, *Scarne's Guide to Modern Poker*. New York: Simon and Schuster, 1980.

第6章 四维空间的教堂

Charles Howard Hinton, *The Fourth Dimension*. London: Swan Sonnenschein, 1904; Allen & Unwin, 1951.

E. H. Neville, *The Fourth Dimension*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1921.

Henry Parker Manning, *The Fourth Dimension Simply Explained*. New York: Munn, 1910; New York: Dover Publications (paperback),

1960.

Henry Parker Manning, *Geometry of Four Dimensions*. New York: Macmillan, 1914; Dover Publications (paperback), 1956.

D. M. Y. Sommerville, *An Introduction to the Geometry of N Dimensions*. London: Methuen, 1929; New York: Dover Publications (paperback), 1958.

Karl Heim, *Christian Faith and Natural Science*. New York Harper, 1953; Harper (paperback), 1957.

J. A. H. Shepperd, "Braids Which Can Be Plaited with Their Threads Tied Together at Each End," *Proceedings of the Royal Society*, *A*, Vol. 265, 1962, p 229—44.

Rudy Rucker (ed.), *Speculations on the Fourth Dimension*. New York: Dover, 1980.

Martin Gardner, "Group Theory and Braids," *New Mathematical Diversions from Scientific American*, Chapter 2. New York: Simon and Schuster, 1966. Reissued by the University of Chicago Press, 1983.

Rudy Rucker, *The Fourth Dimension: Toward a Geometry of Higher Reality*. Boston: Houghton-Mifflin, 1984.

Thomas F. Banchoff, *Beyond the Third Dimension*. New York: W. H. Freeman, 1990.

第8章　火柴盒式的博弈机

W. Ross Ashby, "Can a Mechanical Chess-player Outplay Its Designer?" *British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 3, (1952), No. 44.

Claude E. Shannon, "Game Playing Machines," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 260, No. 6, December 1955, p 447—53.

Allen Newell, J. C. Shaw, and H. A. Simon, "Chess-playing Programs and the Problem of Complexity," *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 2, No. 4, October 1958, p 320—35.

Alex Bernstein and Michael de V. Roberts, "Computer v. Chess-Player," *Scientific American*, June 1958, p 96—105.

A. L. Samuel, "Some Studies in Machine Learning, Using the Game of Checkers," *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 3, No. 3, July 1959, p 210—29.

John Maynard Smith and Donald Michie, "Machines That Play Games," *The New Scientist*, No. 260, November 9, 1961, p 367—69.

Allen Newell and H. A. Simon, "Computer Simulation of Human Thinking," *Science*, Vol. 134 (1961), p 2011—17.

N. Nilsson, *Learning Machines*. New York: McGraw-Hill, 1965.

On hexapawn:

John R. Brown, "Extendapawn—An Inductive Analysis," *Mathematics Magazine*, November December 1965, p 286—99.

Roy A. Gallant, "Can You Beat TIM?," *Nature and Science*, Vol. 3, April 18, 1966, p 3—4.

Robert R. Wier, "Hexapawn: A Beginning Project in Artificial Intelligence," *Byte*, Vol. 1, November 1975, p 36—40.

Carl Bevington, "Hexapawn," *Soft Side*, March 1982, p 23—35.

On minigo:

Edward Thorp and William E. Walden, "A Computer Assisted Study of Go on M X N Boards," *Information Sciences*, Vol. 4, January 1972, p 1—33.

第9章 谈 螺 线

E. H. Lockwood, *A Book of Curves*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1961.

William Kingdon Clifford, *The Common Sense of the Exact Sciences*. New York: Dover Publications, 1955. See p 152—64.

Theodore Andrea Cook, *Spirals in Nature and Art*. London: J. Murray, 1903.

Martin Gardner, *The New Ambidextrous Universe*, New York: W. H. Freeman, 1990.

Eli Maor, "The Logarithmic Spiral," *Mathematics Teacher*, April 1974, p 321—27.

Arthur T. Winfree, "Rotating Chemical Reactions," *Scientific American*, June 1974, p 82—95.

第10章 旋转和反射镜像

Rex Whistler, ¡*OHO*!. London: John Lane, 1946.

Peter Newell, *Topsys & Turvys*. New York: Dover Publications, 1964. [257]

George M. Naimark (ed.), *The Incredible Upside-Downs of Gustave Verbeek*. Summit, N. J.: The Rajah Press, 1963.

Beau Gardner, *The Turn About, Think About, Look About Book*. New York: Lothrop, Lee & Shepard, 1980.

Martin Gardner, "Mathematical Games," *Scientific American*, June 1981, p 22—32. On Scott Kim's inversions.

Scott Kim. *Inversions*. Peterborough, N. H.: Byte Books, 1981.

Douglas Hofstadter, *Ambigrams*. Italy: Hopefulmonster, 1987.

Scot Morris, "Games," *Omni*, March 1989, p 120—21.

Martin Gardner, *The New Ambidextrous Universe*. New York: W. H.

Freeman, 1990.

第11章 单人跳棋

References dealing primarily with problems:

J. Busschopp, *Recherches sur le jeu du solitaire*. Bruges, 1879.

Berkeley (pseudonym of W. H. Peel), *Dominoes and Solitaire*. London: G. Bell, 1890; New York: Frederick A. Stokes, 1890.

Ernest Bergholt, *The Game of Solitaire*. London: George Routledge, 1920; New York: Dutton, 1921.

Paul Redon, *Le Jeu de solitaire*. Paris, no date.

W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*. Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1910. See Vol. 1, Chapter 8.

T. R. Dawson, "Solitaire," *Fairy Chess Review*, Vol. 5, June 1943, p 42—43. Later issues contain other solitaire problems by Dawson, T. H. Willcocks and others.

Harry O. Davis, "33-Solitaire: New Limits, Small and Large," *Mathematical Gazette*, Vol. 51, May 1967, p 91—100.

Donald C. Cross, "Square Solitare and Variations," *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 1, No. 2, April 1968, p 121—23.

References dealing primarily with theory:

M. Reiss, "Beiträge zur Theorie des Solitär-Spiels," *Crelles Journal* (Berlin), Vol. 54 (1857), p 344—79.

Gaston Tissandier, *Popular Scientific Recreations* (translation of an 1881 French work). London: Ward, Lock and Bowden, 1882. See p 735—39.

A. M. H. Hermary, "Le Jeu du solitaire," *Récréations Mathématiques*, edited by Édouard Lucas. Paris: Blanchard (paperback), 1960.

Reprint of 1882 edition. See Vol. 1, p 87—141.

G. Kowalewski, "Das Solitärspiel," *Alte und neue mathematische Spiele*. Leipzig: Teubner, 1930. 【258】

B. M. Stewart, "Solitaire on a Checkerboard," *American Mathematical Monthly*, April 1941, p 228—33.

B. M. Stewart, *Theory of Numbers*, revised edition. New York: Macmillan 1964. See Chapter 2.

Mannis Charosh, "Peg Solitaire," *The Mathematics Student Journal*, Vol. 9, March 1962, p 1—3.

J. D. Beasley, "Some Notes on Solitaire," *Eureka*, No. 25, October 1962, p 13—28.

Martin Gardner, "Jumping Pegs," *The College Mathematics Journal*, Vol. 20, June 1989, p 78—79.

On both problems and theory:

John D. Beasley, *The Ins and Outs of Solitaire*. London: Oxford University Press, 1985.

第12章 平面国漫游记

Charles Howard Hinton, "A Plane World," *Scientific Romances* (London: Allen & Unwin, 1888), Vol. I, p 135—59.

Charles Howard Hinton, *A New Era of Thought*. London: Swan Sonnenschein, 1888.

Charles Howard Hinton, *The Fourth Dimension*. London: Swan Sonnenschein, 1904; Allen & Unwin, 1934.

Charles Howard Hinton, *An Episode of Flatland*. London: Swan Sonnenschein, 1907.

Edwin Abbott Abbott, *Flatland*, with Introduction by Banesh Hoffmann,

New York: Dover Publications, 1952.

Dionys Burger, *Sphereland*. New York: Crowell, 1965. A translation of a Dutch physicist's sequel to Abbott's *Flatland*. The story is told by A. Hexagon, grandson of Abbott's A. Square.

Martin Gardner, "Mathematical Games," *Scientific American*, July 1980, p 18—31. On Flatland.

Rudy Rucker (ed.), *Speculations on the Fourth Dimension: Selected Writings of Charles H. Hinton*. New York: Dover, 1980.

A. K. Dewdney, *The Planiverse: Computer Contact with a Two-Dimensional World*. New York: Poseidon Press, 1984.

第13章　魔术师年会记趣

Royal V. Heath, *Mathemagic*. New York: Simon and Schuster, 1933; Dover Publications (paperback), 1953.

Wallace Lee, *Math Miracles*. Privately printed, 1950; revised edition, 1960.

Martin Gardner, *Mathematics, Magic and Mystery*. New York: Dover Publications, 1956.

William Simon, *Mathematical Magic*. New York: Scribner, 1964.

Karl Fulves, *Self-Working Card Tricks*. New York: Dover, 1976.

Martin Gardner, "Mathematical Tricks with Cards," *Wheels, Life, and Other Mathematical Amusements*, Chapter 19. New York: W. H. Freeman, 1983.

第14章　除不除得尽?

Leonard Eugene Dickson, "Criteria of Divisibility by a Given Number," *History of the Theory of Numbers* (New York: Chelsea Publishing, 1952), Vol. I, Chapter 12, p 337—46. Originally published in

1919.

J. M. Elkin, "A General Rule for Divisibility Based on the Decimal Expansion of the Reciprocal of the Divisor," *American Mathematical Monthly*, Vol. 59, May 1952, p 316—18.

Kenneth A. Seymour, "A General Test for Divisibility," *The Mathematics Teacher*, Vol. 56, March 1963, p 151—54.

J. Bronowski, "Division by 7," *Mathematical Gazette*, Vol. 47, October 1963, p 234—35.

Wendell M. Williams, "A Complete Set of Elementary Rules for Testing for Divisibility," *The Mathematics Teacher*, Vol. 56, October 1963, p 437—42.

Jack M. Elkin, "Repeating Decimals and Tests for Divisibility," *The Mathematics Teacher*, Vol. 57, April 1964, p 215—18.

E. A. Maxwell, "Division by 7 or 13," *Mathematical Gazette*, Vol. 49, February 1965, p 84.

Sister M. Barbara Stastny, "Divisibility Patterns in Number Bases," *The Mathematics Teacher*, Vol. 58, April 1965, p 308—10.

Benjamin Bold, "A General Test for Divisibility by Any Prime (Except 2 and 5)," *The Mathematics Teacher*, Vol. 58, April 1965, p 311—12.

Henri Feiner, "Divisibility Test for 7," *The Mathematics Teacher*, Vol. 58, May 1965, p 429—32.

John Q. Jordan, "Divisibility Tests of the Noncongruence Type," *The Mathematics Teacher*, Vol. 58, December 1965, p 709—12.

Robert Pruitt, "A General Divisibility Test," *The Mathematics Teacher*, Vol. 59, January 1966, p 31—33.

R. L. Morton, "Divisibility by 7, 11, 13, and Greater primes," *The Mathematics Teacher*, Vol. 61, April 1968, p 370—73.

E. Rebecca Matthews, "A Simple '7' Divisibility Rule," *Mathematics Teacher*, Vol. 62, October 1969, p 461—64.

Robert E. Kennedy, "Divisibility by Integers Ending in 1, 3, 7, or 9," *Mathematics Teacher*, Vol. 65, February 1971, p 137—38.

Najib Yazbak, "Some Unusual Tests of Divisibility," *Mathematics Teacher*, Vol. 69, December 1976, p 667—68.

[260]

Lehis Smith, "A General Test of Divisibility," *Mathematics Teacher*, Vol. 71, November 1978, p 668—69.

Walter Szetela, "A General Divisibility Test for Whole Numbers," *Mathematics Teacher*, Vol. 73, March 1980, p 223—25.

第16章　棋盘上谈数学

The problem of the nonattacking queens:

A. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*. Leipzig: Teubner, 1910. Vol. I, Chapter 9.

W. W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, revised edition. New York: Macmillan, 1960. Chapter 6.

Maurice Kraitchik, *Mathematical Recreations*, revised edition. New York: Dover Publications, 1953. Chapter 10.

Édouard Lucas, ed., *Récréations Mathématiques*. Paris: Blanchard, 1960. Chapter 4. A reprint of the original 1882 edition.

The problem of the nonattacking rooks:

Henry Ernest Dudeney, *Amusements in Mathematics*. London: Thomas Nelson and Sons, 1917. New York: Dover Publications, 1958. p 76, 88 (problem 296), and 96.

A. M. Yaglom and I. M. Yaglom, *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*. San Francisco: Holden-Day, 1964. Section III.

Joseph S. Madachy, *Mathematics on Vacation*. New York: Scribner, 1966. Chapter 2.

第17章　绳子把戏

Caroline Furness Jayne, *String Figures*. New York: Scribner, 1906; Dover Publications (paperback), 1962.

W. W. Rouse Ball, *An Introduction to String Figures*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1920. Reprinted in *String Figures and Other Monographs* (New York: Chelsea Publishing, 1960.)

Kathleen Haddon, *Artists in String*. London: Methuen, 1930; New York: Dutton, 1930.

Kathleen Haddon, *String Games for Beginners*. Cambridge, England: Cambridge University Press. 1934.

Joseph Leeming, *Fun with String*. New York: Stokes, 1940.

Jerome Barry, *Leopard Cat's Cradle*. Garden City, N. Y.: Doubleday, 1942.

Eric Franklin, *Kamut: Pictures in String*. New York: Arcas, 1945.

Frederic V. Grunield (ed.), *Games of the World*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975, p 254—59.

【261】

Joost Elffers and Michael Schuyt, *Cat's Cradle and Other String Figures*. London: Penguin, 1979.

Jearl Walker, "The Amateur Scientist," *Scientific American*, May 1985, p 138—43.

C. Gryski, *Cat's Cradle and Other String Games*. London: Angus and Robertson, 1985.

第18章　定宽曲线

Franz Reuleaux, *The Kinematics of Machinery*. New York: Macmillan,

1876; Dover Publications, 1964. See p 129—46.

Wilhelm Blaschke, *Kreis und Kugel*. Leipzig, 1916; Berlin: W. de Gruyter, 1956.

Hans Rademacher and Otto Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1957. See p 163—77, 203.

I. M. Yaglom and V. G. Boltyanskii, *Convex Figures*. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1961. Chapters 7 and 8.

J. H. Cadwell, *Topics in Recreational Mathematics*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1966. Chapter 15.

Michael Goldberg, "Trammel Rotors in Regular Polygons," *American Mathematical Monthly*, Vol. 64, February 1957, p 71—78.

Michael Goldberg, "Rotors in Polygons and Polyhedra," *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*. Vol. 14, July 1960, p 229—39.

Michael Goldberg, "N-Gon Rotors Making N + 1 Contacts with Fixed Simple Curves," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, June-July 1962, p 486—91.

Michael Goldberg, "Two-lobed Rotors with Three-Lobed Stators," *Journal of Mechanisms*, Vol. 3, 1968, p 55—60.

John A. Dossey, "What? —A Roller with Corners?," *Mathematics Teacher*, December 1972, p 720—24.

Cecil G. Gray, "Solids of Constant Breadth," *Mathematical Gazette*, December 1972, p 289—92.

Ross Honsberger, *Mathematical Gems*, Chapter 5. Washington, D. C., 1973.

G. D. Chakerian and H. Groemer, "Convex Bodies of Constant Width," *Convexity and Its Applications*, Peter M. Gruber and Jörg M. Wills,

eds. Boston: Birkhauser, 1983.

J. Chen Fisher, "Curves of Constant Width from a Linear Viewpoint," *Mathematics Magazine*, Vol. 60, June 1987, p 131—40.

On Kakeya's needle problem:

I. M. Yaglom and V. G. Boltyanskii, *Convex Figures*. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1961. See p 61—62, 226—27.

J. H. Cadwell, *Topics in Recreational Mathematics*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1966. See p 96—99.

A. S. Besicovitch, "The Kakeya Problem," *American Mathematical Monthly*, Vol. 70, August-September 1963, p 697—706.

A. A. Blank, "A Remark on the Kakeya Problem," *American Mathematical Monthly*, Vol. 70, August-September 1963, p 706—11.

F. Cunningham, Jr., "The Kakeya Problem for Simply Connected and Starshaped Sets," *American Mathematical Monthly*, Vol. 78, February 1971, p 114—29.

第 19 章　谈平面复生图形

C. Dudley Langford, "Uses of a Geometrical Puzzle," *Mathematical Gazette*, Vol. 24, July 1940, p 209—11.

R. Sibson, "Comments on Note 1464," *Mathematical Gazette*, Vol. 24, December 1940, p 343.

Howard D. Grossman, "Fun with Lattice Points," *Scripta Mathematica*, Vol. 14, June 1948, p 157—59.

Solomon W. Golomb, "Replicating Figures in the Plane," *Mathematical Gazette*, Vol. 48, December 1964, p 403—12.

M. Goldberg and B. M. Stewart, "A Dissection Problem for Sets of Polygone," *American Mathematical Monthly*, Vol. 71, December

1964, p 1077—95.

Roy O. Davies, "Replicating Boots," *Mathematical Gazette*, Vol. 50, May 1966, p 157.

G. Valette and T. Zamfirescu, "Les Partages d'un Polygone Convexe en 4 Polygones Semblables au Premier," *Journal of Combinatorial Theory*, B, Vol. 16, 1974, p 1—16.

Jack Giles, Jr., "Infinite-level Replication Dissections of Plane Figures," "Construction of Replicating Superfigures," and "Superfigures Replicating with Polar Symmetry," *Journal of Combinatorial Theory*, 26A, 1979, p 319—27, 328—34, 335—37.

Jack Giles, Jr., "The Gypsy Method of Superfigure Construction," *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 13, 1980/81, p 97—101.

F. M. Dekking, "Replicating Superfigures and Endomorphisms of Free Groups," *Journal of Combinatorial Theory*, Vol. 32A, 1982, p 315—20.

J. Doyen and M. Lenduyt, "Dissection of Polygons," *Annals of Discrete Mathematics*, Vol. 18, 1983, p 315—18.

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，已阔步迈进了21世纪.

回顾过去的一个世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位．数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献．同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志．因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学．现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路．面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步．这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平

相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今.改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此，借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物，推动国内的数学普及与传播工作，为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述，基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类，有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系；等等，试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多彩.

丛书的读者对象，力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品，以使包括大、中学生；大、中学教师；研究生；一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者，本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树，一个数学家对于他所研究的专业以外的领域，也往往深有隔行如隔山之感，也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是，由于种种原因，近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气.在这样的情况下，上海教育出版社按照国际版权公约，不惜耗资购买版权，组织翻译出版这套《通俗数学名

著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措. 参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见. 值得高兴的是，这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持，特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词，使我们深受鼓舞. 到目前为止，这套丛书已出版了 13 种,印数大多逾万,有的已经是第四次印刷，这对编译者来说确是令人欣慰的信息. 我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》的出版获得更大的成功.

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

2001 年 8月

1991 年版序言

《意料之外的绞刑和其他数学娱乐》是我为《科学美国人》月刊所撰写的“数学游戏”专栏文章的第五本结集，这一栏目创办于1957年。这一系列的前两本集子《六边折叠形和其他数学娱乐》、《科学美国人》数学难题和娱乐第二集》的芝加哥大学出版社的平装本迄今还能买到。

我尽我所能为各章的进展写了一个编后记，并在参考文献中新添了一百多条资料。

马丁·加德纳